

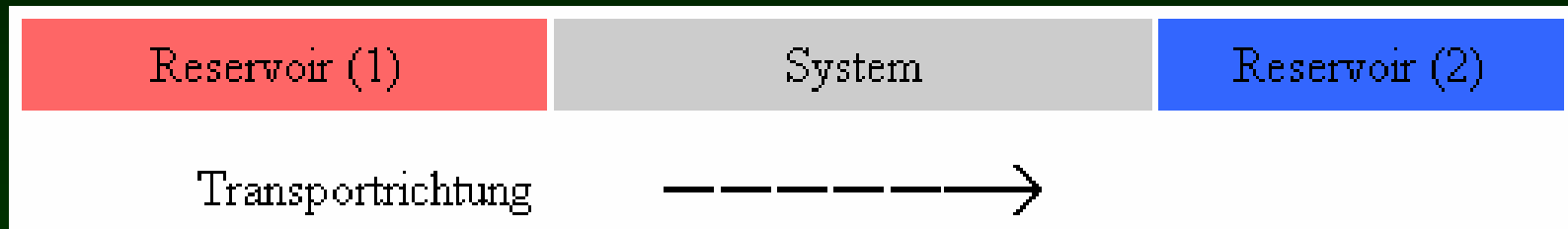
PC I

Thermodynamik und Transportprozesse

Kapitel 6

Transportprozesse

Der Fluss von Materie, Energie, Impuls



Eine charakteristische Größe für den Transport eines "Transportgutes" G ist der Fluss J_G . Wir verstehen darunter die Menge des Gutes G , die pro Zeiteinheit und pro Flächeneinheit transportiert wird.

$$J_G = \frac{G_{\text{Gut}}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}$$

Je nach Art des Transports sprechen wir von Teilchen-, Masse-, Energie- oder Ladungsfluss

Teilchenfluss

Wir betrachten zunächst ein Gas bei der Temperatur T und einem Druck p , das über ein sehr kleines Loch der Fläche A ins Vakuum entweichen kann, d.h. es findet ein Fluss von N Teilchen statt. Der Fluss ist $J_N = N/A\Delta t$.

Der Teilchenfluss

$$J_N = (N/V) \cdot (\Delta x / \Delta t)$$

ist unter Berücksichtigung der Geschwindigkeitsverteilung $f(v_x)$ nach Boltzmann

$$J_N = \int_0^{\infty} (N/V) v_x f(v_x) dv_x = (N/V) \cdot \sqrt{(kT/2\pi m)} = 1/4 \cdot \langle v \rangle N/V$$

$$J_N = p / \sqrt{(2\pi mkT)}$$

Die Abhängigkeit von Fluss und Molekülmasse ermöglicht die Trennung von Isotopen oder die Dampfdruckbestimmung nach Knudsen.

Wärmeleitfähigkeit

Der Wärme oder Energiefluss ist abhängig vom Temperaturgradienten und dem Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten κ

$$J_{\text{Energie}} = -\kappa \frac{dT}{dz}$$

Theoretische Ermittlung von κ führt auf

einfacher Ansatz	komplexere Rechnung	Dimension
$\frac{1}{3} C_{V,m} \lambda \langle v \rangle n/V =$ $\frac{2}{3} C_{V,m} \sqrt{(kT/\pi m)} / (N_A \pi d^2)$	$(25\pi/64) C_{V,m} \lambda \langle v \rangle n/V =$ $(25\pi/32) C_{V,m} \cdot \sqrt{(kT/\pi m)} / (N_A \pi d^2)$	$J \cdot K^{-1} m^{-1} s^{-1}$

κ ist **druckunabhängig**. Wenn die Abmessungen des Systems im Experiment kleiner als die mittlere freie Weglänge ausfallen, wird κ proportional zur Zahl der Energieträger, also $\kappa \sim n \sim p$. Dies ermöglicht die Messung von Drücken mit Wärmeleitfähigkeitsmanometern ($0,1 \text{ Pa} < p < 1000 \text{ Pa}$)

Diffusion

Der **Materiefluss** J_{Materie} ist proportional zum Gradienten der Konzentration

$$J_{\text{Materie}} \sim dc/dz$$

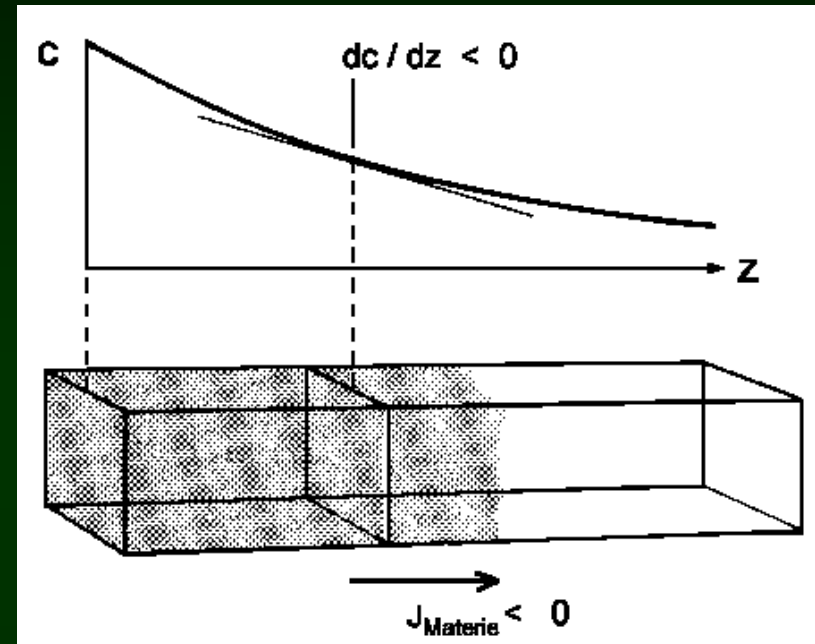
Um positive Flüsse zu erhalten, wird $-D$ als Proportionalitätskonstante gewählt.

Wir erhalten das **1. Ficksche Gesetz**:

$$J_{\text{Materie}} = -D \frac{dc}{dz}$$

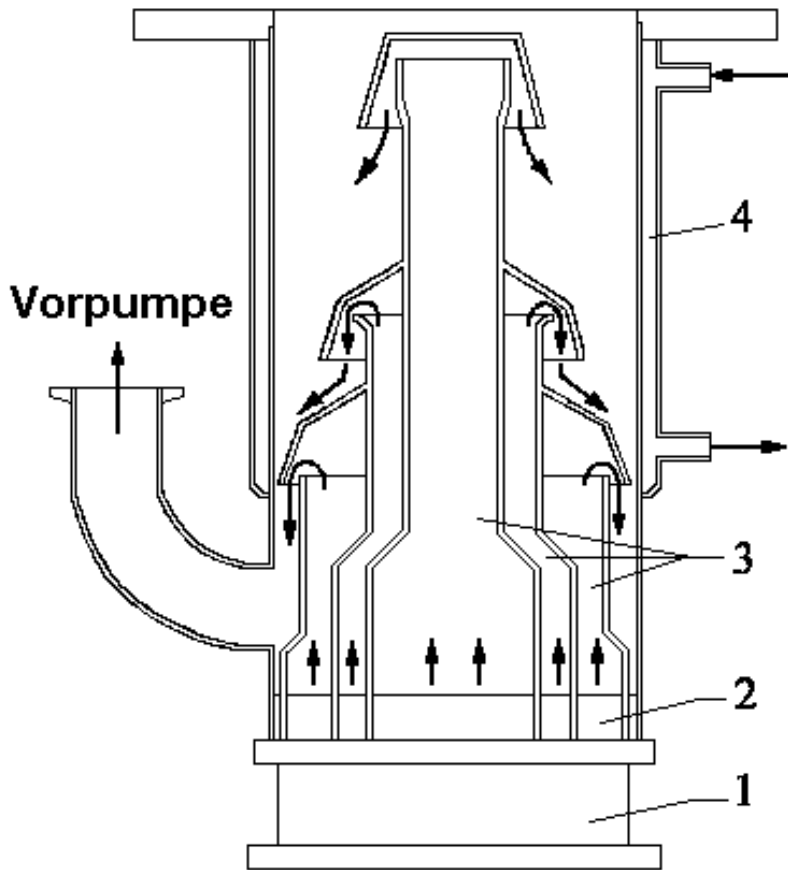
D ist der **Diffusionskoeffizient**.

Modellrechnungen auf Basis der kinetischen Gastheorie liefern D , wenn λ die mittlere freie Weglänge bezeichnet:



	einfache Rechnung	komplexere Rechnung	Dimension
D	$\frac{1}{2} \langle v \rangle \lambda$	$\frac{3\pi}{16} \langle v \rangle \lambda$	m^2s^{-1}

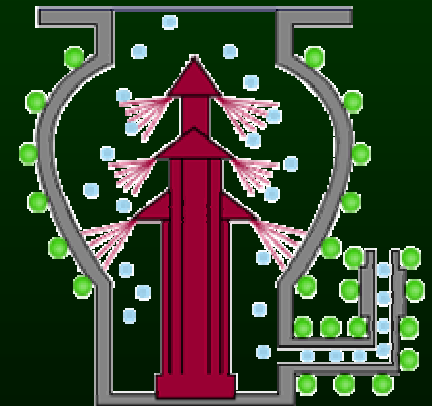
Vakuumpumpe



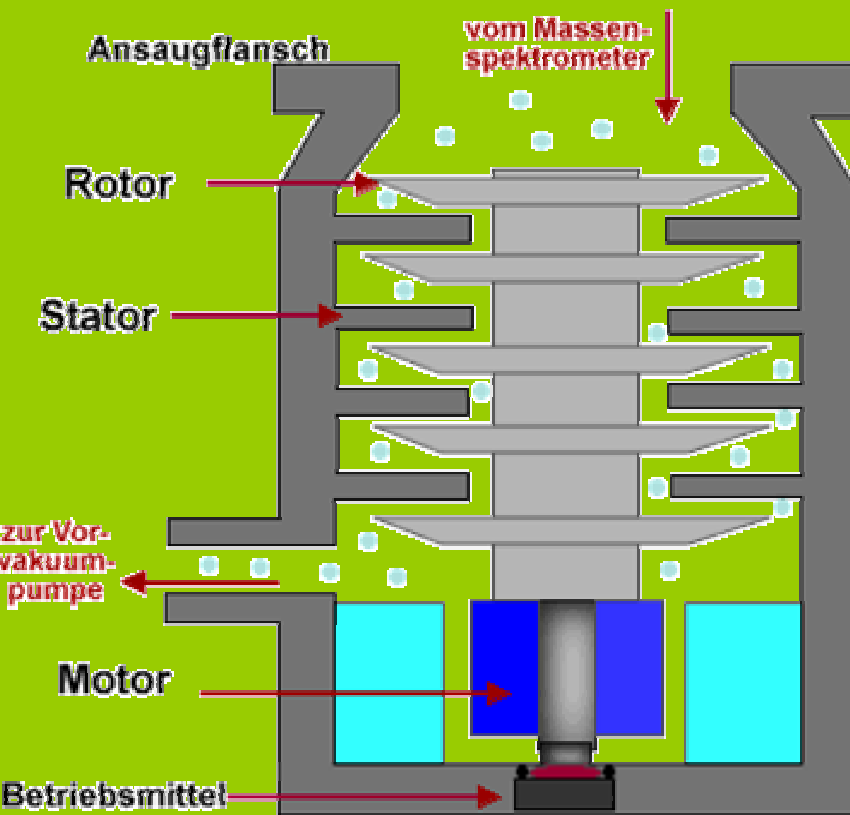
Diffusionspumpe

Der Dampf einer siedenden Flüssigkeit strömt nach oben und wird durch Kappen geeigneter Form umgelenkt. Hier diffundiert Gas aus der zu evakuierenden Apparatur in den Dampf hinein und wird mit nach unten geführt.

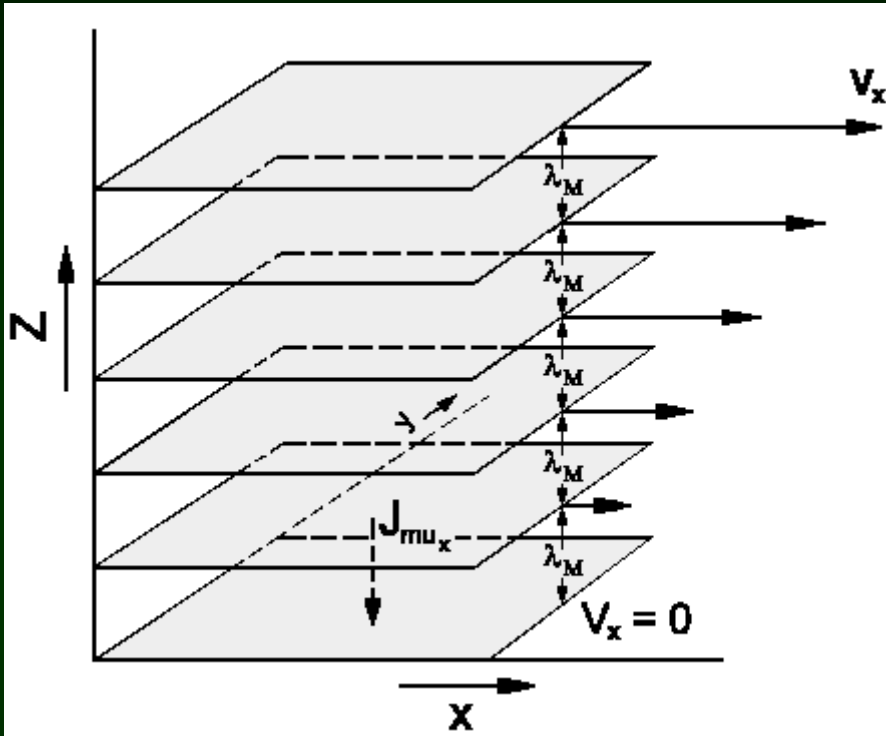
- 1 Heizkörper
- 2 Siedegefäß
- 3 Steigrohre
- 4 Kühlmantel



Turbomolekularpumpe



Viskosität



Viskosität / Zähigkeit einer Flüssigkeit beschreibt die **innere Reibung** in einer Flüssigkeit. Solche Kräfte koppeln Bewegungen an verschiedenen Orten der Flüssigkeit aneinander.

Einfachster Modellfall ist die **laminare Strömung**, bei der man von einem Stapel von Flüssigkeitsschichten einer gewissen Höhe z ausgeht, in der für jede Schichthöhe eine gewisse Durchschnittsgeschwindigkeit $v_x(z)$ anzutreffen ist.

Ungerichtete thermische Bewegungen zwischen den Schichten führen zur Beschleunigung langsamerer und Abbremsung schnellerer Schichten. Dies kann als ein **Fluss J_{Impuls}** von Impuls von schnellen zu langsamen Schichten aufgefasst werden. Er ist proportional dem Geschwindigkeitsgradienten dv_x/dz .

Die Proportionalitätskonstante entspricht dem **Viskositätskoeffizienten η**

$$J_{\text{Impuls}} = -\eta \frac{dv_x}{dz}$$

	einfache Rechnung	komplexere Rechnung	Dimension
η	$\frac{1}{3} m \langle v \rangle \lambda \cdot (N/V) = \frac{2}{3} (kT/\pi m)^{1/2} (m/\pi d^2)$	$\frac{5\pi}{32} m \langle v \rangle \cdot (N/V) = \frac{5\pi}{16} (kT/\pi m)^{1/2} (m/\pi d^2)$	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

Weil $(N/V) \sim p$ ist, aber andererseits $\lambda \sim 1/p$ ist die Viskosität (wie die Wärmeleitfähigkeit) druckunabhängig (für Gefäße mit Abmessungen größer als die mittlere freie Weglänge λ).

Der Quotient von Wärmeleitfähigkeit und Viskosität (Molmasse M) lautet:

$$\kappa/\eta = \frac{5}{2} C_{v,m}/M$$

Temperaturabhängigkeit der Viskosität

- ist bei Gasen durch $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$ vorgegeben, steigt η mit steigender Temperatur
- bei Flüssigkeiten dagegen fällt η mit steigender Temperatur

Laminare und turbulente Strömung

Eine Strömung, deren Verhalten durch die innere Reibung bestimmt wird, heißt **laminare** Strömung im Gegensatz zur **turbulenten** Strömung.

Die **Reynolds-Zahl**

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}$$

ist eine Größe, die vorhersagen lässt, welche Strömungsart bei der Dichte ρ , der Transportgeschwindigkeit v und der Viskosität η in einem System vorliegt. Dessen Abmessungen (z.B. Rohrdurchmesser) gehen mit der so genannten charakteristischen Länge ein.

Re < 1000 : laminare Strömung

Re > 2000 : turbulente Strömung

Elektrische Leitfähigkeit – Ohmsches Gesetz

Der Fluß einer Ladung Q wird als elektrische Stromdichte j bezeichnet und ist proportional zum Gradienten des elektrischen Potentials Φ

$$J_Q = j = -\sigma \frac{d\phi}{dz}$$

Proportionalitätskonstante σ ist die **spezifische elektrische Leitfähigkeit** in $S \cdot m^{-1}$ (1 Siemens = $1 A/V$). Da die elektrische Feldstärke $E = d\phi/dz$ ist, folgt

$$j = \sigma E$$

das ist das in den Schreibweisen $I = U/R$ oder $R = U/I$ bekanntere **Ohmsche Gesetz**.

Drude und Lorentz beschrieben die Leitfähigkeit σ als Bewegung freier Elektronen im Metallen.

$$\sigma = n_e e^2 \lambda / (2m \langle v_e \rangle)$$

Hier ist n_e die Dichte der Elektronen, λ die mittlerer freie Weglänge und $\langle v_e \rangle$ die mittlere thermische Geschwindigkeit.

Die **Wärmeleitfähigkeit κ von Metallen** ist nach der „Elektronengastheorie“

$$\kappa = \frac{6}{\pi} n_e k^2 T \lambda / m \langle v_e \rangle$$

Ableitbar ist damit das Verhältnis Wärmeleitfähigkeit zu elektrischer Leitfähigkeit

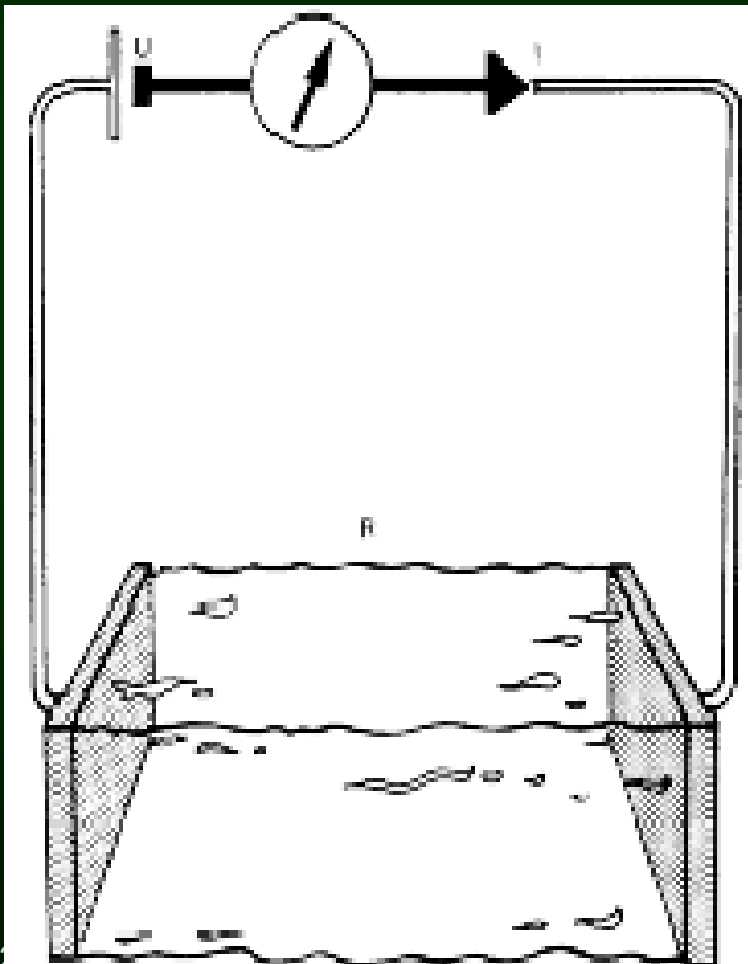
$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{\kappa}{e} \right)^2 T \quad \rightarrow \quad \frac{\kappa}{\sigma} = 2,44 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2 \text{K}^{-2} \cdot T$$

Die Tabelle zeigt eine gute Annäherung zwischen dem theoretisch erwarteten und bei diversen Metallen gemessenen Werten.

Temperatur in K	Elektrische Leitfähigkeit $\sigma \cdot 10^{-5}$ in $\Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$				Konstante $\frac{\kappa}{\sigma T} \cdot 10^8$ in V^2/K^2			
	80	273	373	573	80	273	373	573
Silber	32,50	6,70	4,76	2,97	1,77	2,28	2,36	2,41
Kupfer	43,60	6,45	4,50	2,79	1,56	2,24	2,35	2,37
Gold	20,60	4,90	3,51	2,20	2,03	2,35	2,36	2,42
Aluminium	28,80	4,15	2,86	1,80	1,11	2,03	2,11	2,13
Zink	9,90	2,08	1,47	0,89	1,70	1,90	1,92	1,96
Nickel	9,30	1,65	0,99	0,452	1,68	1,95	2,28	2,43
Platin	4,95	1,02	0,733	0,476	2,00	2,55	2,60	2,75
Blei	2,02	0,532	0,375	0,224	2,33	2,31	2,40	2,62

Elektrolyte - Ionentransport

Beim Transport von Ionen in einer Lösung unter Einfluss eines elektrischen Feldes bewegen sich die Kationen in Richtung der negativ geladenen Elektrode und die Anionen in Richtung der positiv geladenen Elektrode.



Für die Bestimmung der Leitfähigkeit σ wird eine Messzelle eingesetzt, deren Geometrie die Zellkonstante C_Z widerspiegelt. Der gemessene Widerstand R der mit der untersuchten Lösung gefüllten erlaubt die Berechnung der Leitfähigkeit $\sigma = C_Z/R$.

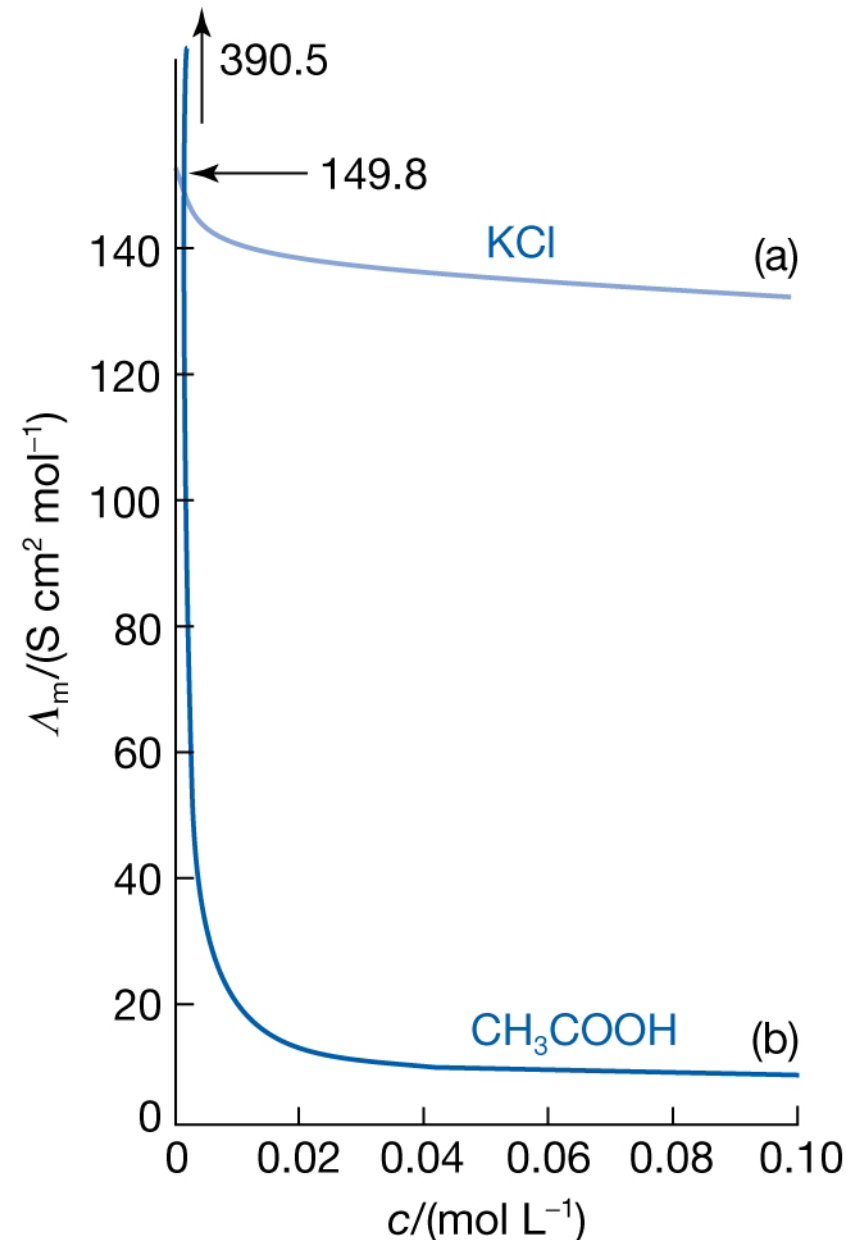
Kennzeichnend für Elektrolyte ist die auf die Konzentration an Ionen bezogene **molare Leitfähigkeit**

$$\Lambda_m = \sigma/c$$

Elektrolyte

Die Konzentrationsabhängigkeit der molaren Leitfähigkeit Λ_m ist Grundlage für die Einteilung der Elektrolyte in zwei Klassen:

- **starke Elektrolyte:** Λ_m ist kaum konzentrationsabhängig, kleine Abnahme bei steigender Konzentration des Elektrolyten (a).
- **schwache Elektrolyte:** Λ_m für Verdünnung gegen $c = 0$ M hoch, zunehmender Konzentration stark abfallend (b).



Starke Elektrolyte...

...sind in Lösung vollständig ionisiert, für die molare Leitfähigkeit gilt näherungsweise

$$\Lambda_m = \Lambda_m^\circ - K_e \cdot \sqrt{c}$$

Λ_m° ist die molare Grenzleitfähigkeit, K_e hängt vom Typ des Elektrolyten ab.

Λ_m° setzt sich aus den Beiträgen der Ionen zusammen

$$\Lambda_m^\circ = \nu_+ \lambda_+ + \nu_- \lambda_-$$

λ_+ , λ_- von Ionen in Wasser bei 298 K [S cm² mol⁻¹]

H ⁺	349,6	OH ⁻	199,1
Na ⁺	50,1	Cl ⁻	76,4
K ⁺	73,5	Br ⁻	78,1
Zn ²⁺	105,6	SO ₄ ²⁻	160,0
Li ⁺	38,7		
Ba ²⁺	127,2		

Schwache Elektrolyte...

...hätten bei vollständiger Ionisation die molare Leitfähigkeit Λ_m° , da sie aber real nur zu einem Bruchteil α ionisiert sind, misst man

$$\Lambda_m = \alpha \Lambda_m^\circ$$

Mit dem Dissoziationsgrad α und der Konzentration c können wir die Gleichgewichtskonzentration berechnen:



Es ist also $K = \frac{c\alpha^2}{1-\alpha}$

Mit $\alpha = \Lambda_m / \Lambda_m^\circ$ erhalten wir die Gleichung

$$K = \Lambda_m^2 c / [\Lambda_m^\circ (\Lambda_m^\circ - \Lambda_m)]$$

die sich auf die Form

$$1/\Lambda_m = 1/\Lambda_m^\circ + \Lambda_m c / K(\Lambda_m^\circ)^2$$

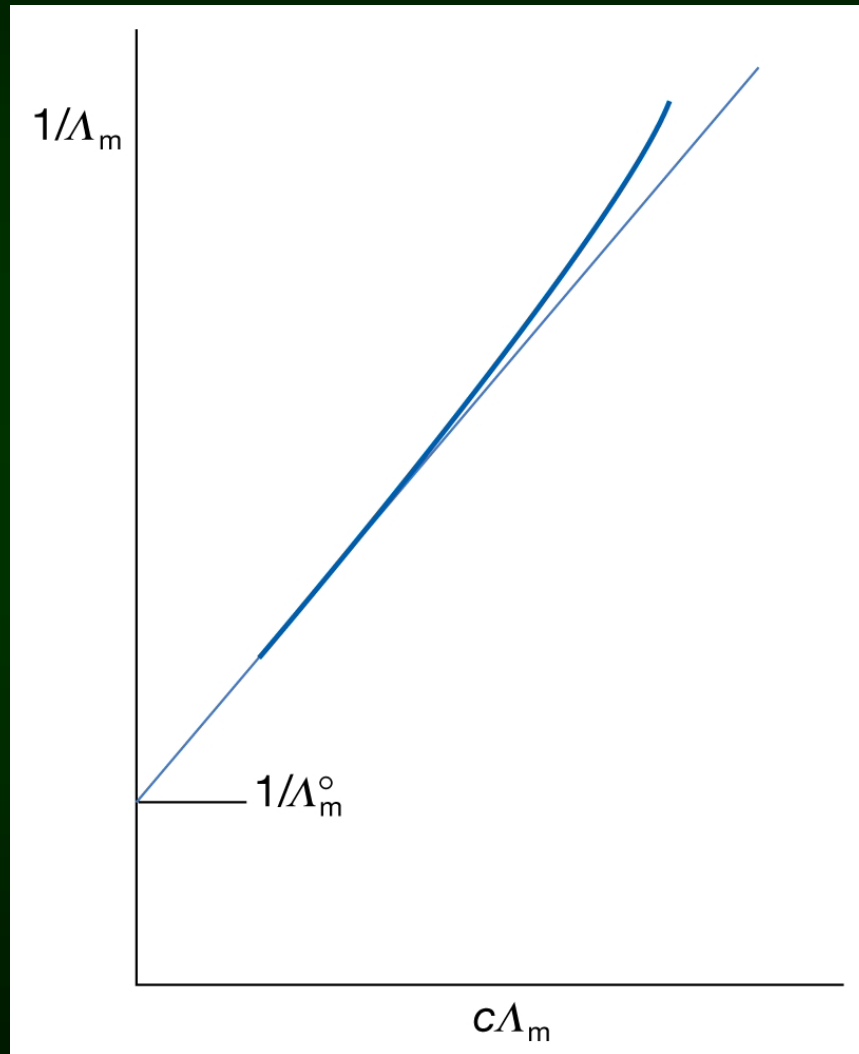
bringen lässt. Dieses **Ostwaldsche Verdünnungsgesetz** macht bei einer Auftragung $1/\Lambda_m$ über $\Lambda_m c$ die Gleichgewichtskonstante zugänglich.

Experimentelle Bestimmung von Λ_m°

Ostwaldsche
Verdünnungsgesetz

$$1/\Lambda_m = 1/\Lambda_m^\circ + c\Lambda_m/K(\Lambda_m^\circ)^2$$

$1/\Lambda_m^\circ$ erhält man durch
Extrapolation von c gegen 0.



Solvatisierung von Ionen

Lösen entspricht dem **Trennen von Ionen** in einem Lösungsmittel.
Dessen Dielektrizitätskonstante ϵ spielt dabei eine entscheidende Rolle.

Vergleichsrechnung:

Ein Ionenpaar Na^+Cl^- soll einmal im Vakuum, ohne Dielektrikum, und einmal in Wasser (einem Dielektrikum mit $\epsilon = 78,5$) von einem Abstand 0,2 nm ausgehend in unendliche Entfernung voneinander gebracht werden.

Vakuum

$$\begin{aligned}\Delta E &= \int_{0,2\text{nm}}^{\infty} F dr = \int_{0,2\text{nm}}^{\infty} e_1 e_2 / 4\pi\epsilon_0 r^2 dr \\ &= 1,15 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 7,19 \text{ eV}\end{aligned}$$

Wasser

$$\begin{aligned}\Delta E &= \int_{0,2\text{nm}}^{\infty} F dr = \int_{0,2\text{nm}}^{\infty} e_1 e_2 / 4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2 dr \\ &= 1,47 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0,0915 \text{ eV}\end{aligned}$$

Abhängigkeit der Leitfähigkeit von Ionen- und Lösungsmiteleigenschaften

In einer von konstantem Strom durchflossenen Lösung kompensieren sich bei den wandernden Ionen

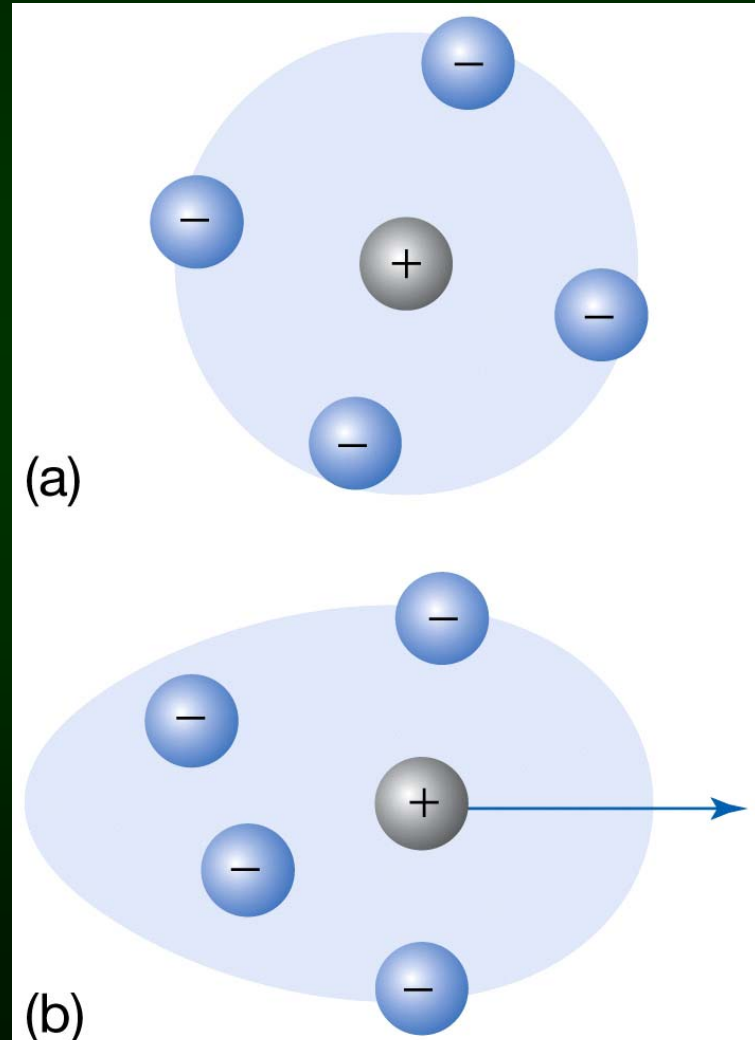
- die beschleunigende elektrische Kraft $F = zeE$ und
- die bremsende Reibungskraft $F = 6\pi\eta aw$ (Stokes) und die Ionen (von Radius a) bewegen sich mit konstanter Wanderungsgeschwindigkeit w . Für diese Wanderungsgeschwindigkeit finden wir dann

$$w = \left(\frac{ze}{6\pi\eta a} \right) E$$

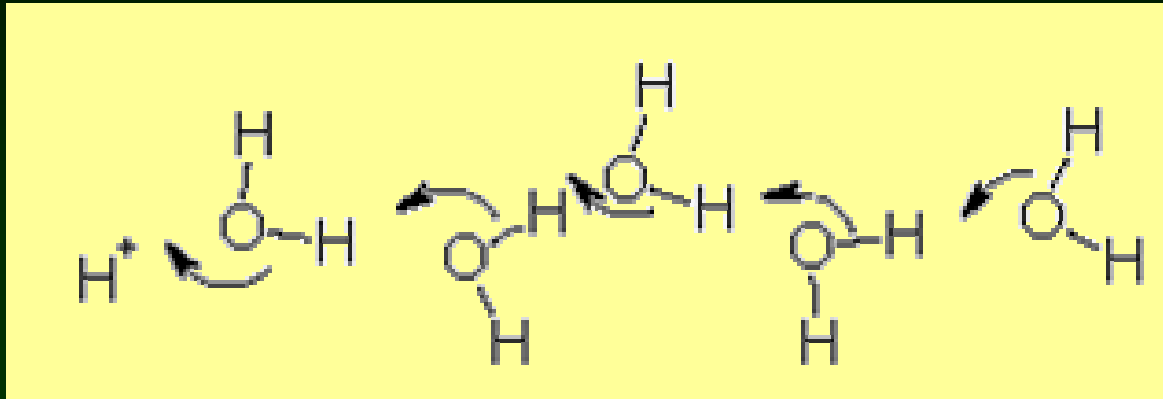
Demnach sinkt w mit höherer Viskosität der Flüssigkeit und steigendem Ionenradius a .

Zwischen w und E wird die **Ionenbeweglichkeit** u als Proportionalitätsfaktor eingeführt:

$$w = u \cdot E$$



Ionenbeweglichkeiten in Wasser

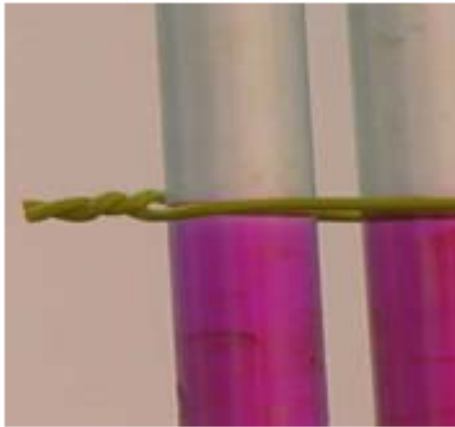


Protonenwanderung

Ionenbeweglichkeiten in Wasser bei
298 K, $u / 10^{-4} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$

H^+	36,23	OH^-	20,64
Na^+	5,19	Cl^-	7,91
K^+	7,62	Br^-	8,09
Zn^{2+}	5,47	SO_4^{2-}	8,29

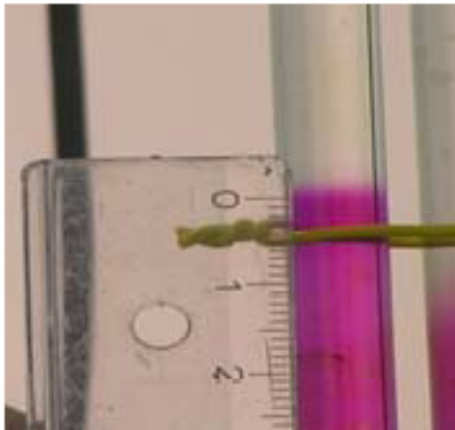
Ionenwanderung



Zurückgelegter Weg s

$$s = v t \text{ (Geschwindigkeit mal Zeit)}$$
$$v = u E \text{ Beweglichkeit mal E-Feld}$$

$$s = u E t$$



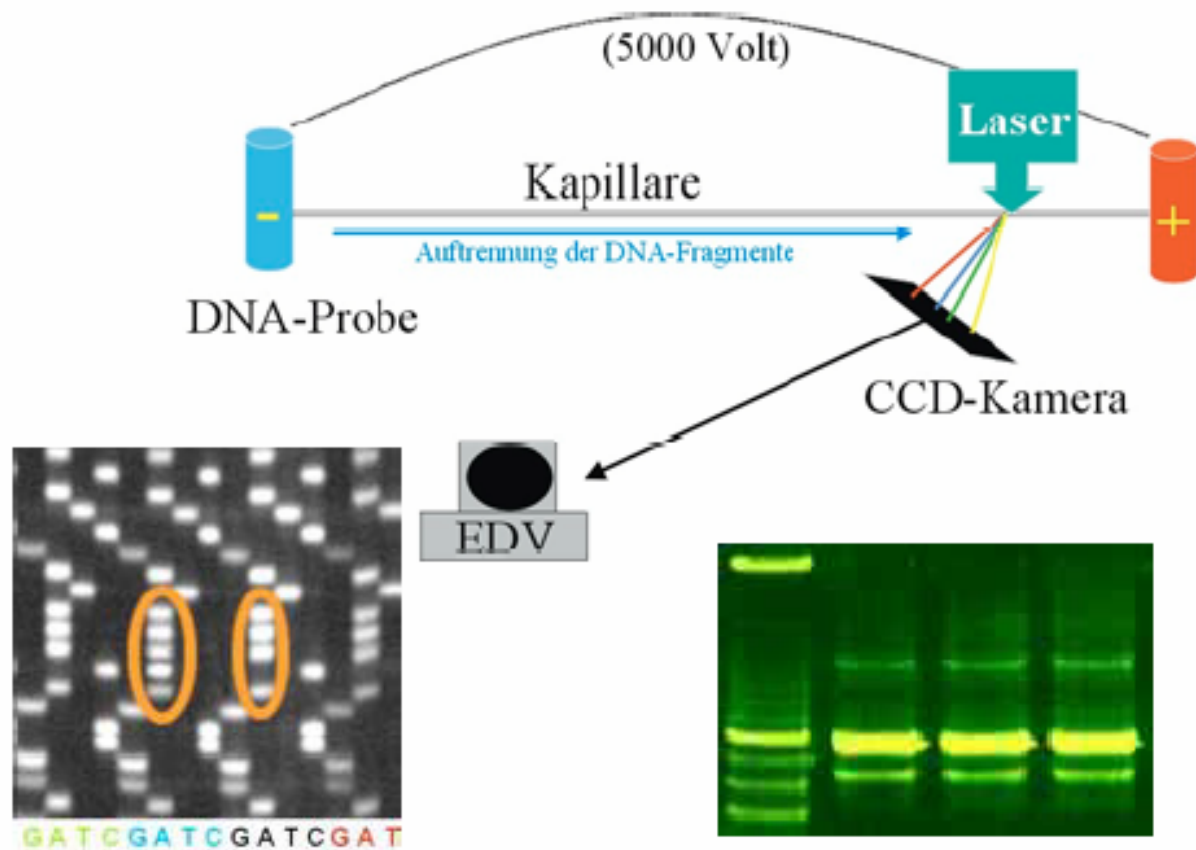
Beweglichkeit

$$\text{MnO}_4^- \quad 5.6 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{Vs}$$

$$\text{H}^+ \quad 32.9 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{Vs}$$

Elektrophorese

Unterschiedliche Beweglichkeit von Teilchen: Trennung Elektrophorese



Proteine wandern unterschiedlich schnell auf Trägermaterial

Herleitung des Ladungsflusses für die Kationen

- jede Formeleinheit erzeugt v_+ Kationen
- die Ionen transportieren ein z -faches der Elementarladung e
- der Fluss entspricht der Teilchenzahl, die innerhalb der Zeit Δt aufgrund ihrer Geschwindigkeit w die gedachte Fläche A durchtreten.

Mit der Faradaykonstanten $F=eN_A$ folgt

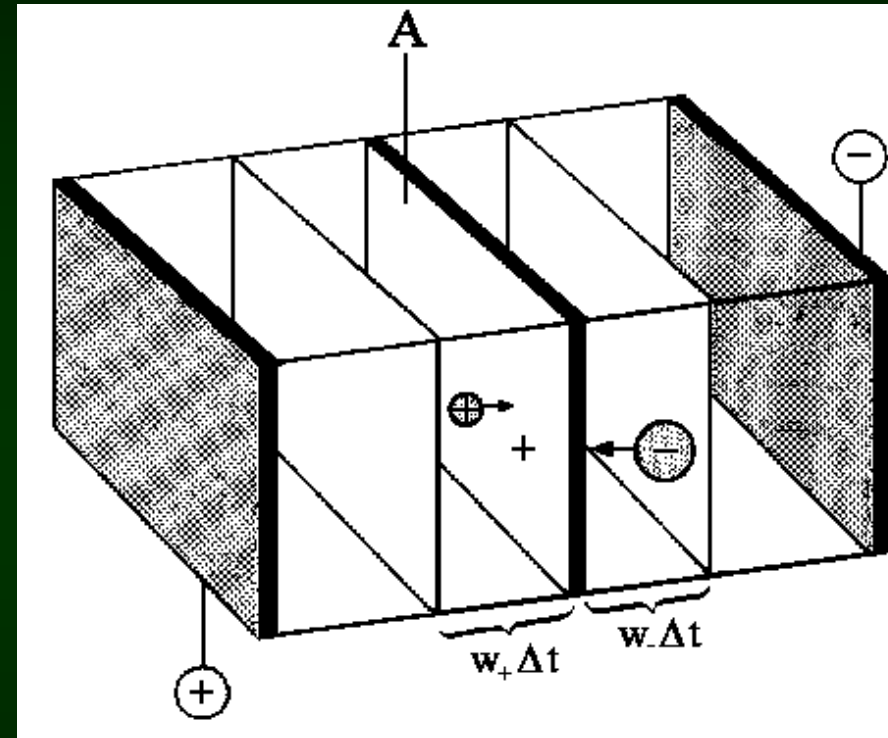
$$\mathbf{J}_{\text{Ladung}} = \mathbf{z}_+ \mathbf{u}_+ v_+ c \cdot \mathbf{FE}$$

Eliminieren der variablen Feldstärke E
Über die spezifische Leitfähigkeit σ der Kationen

$$\sigma_+ = \mathbf{z}_+ \mathbf{u}_+ v_+ c \cdot F$$

$$\text{Mit } \Lambda_m = \sigma / c \quad \Lambda_m^\circ = \{z_+ u_+ v_+ + z_- u_- v_-\} \cdot F$$

$$\text{molare Ionenleitfähigkeit } \lambda_+ = z_+ u_+ F$$



Überführungszahlen

Die Hittorfsche Überführungszahlen t_+ bzw. t_- ist der Bruchteil am Gesamtstrom, den das Kation bzw. das Anion transportiert.

$$t_+ = I_+/I \quad t_- = I_-/I$$

Für einen symmetrischen Elektrolyten erhält man für Verdünnung gegen $c = 0M$.

$$t_+^\circ = u_+/(u_+ + u_-) \quad t_-^\circ = u_-/(u_+ + u_-)$$

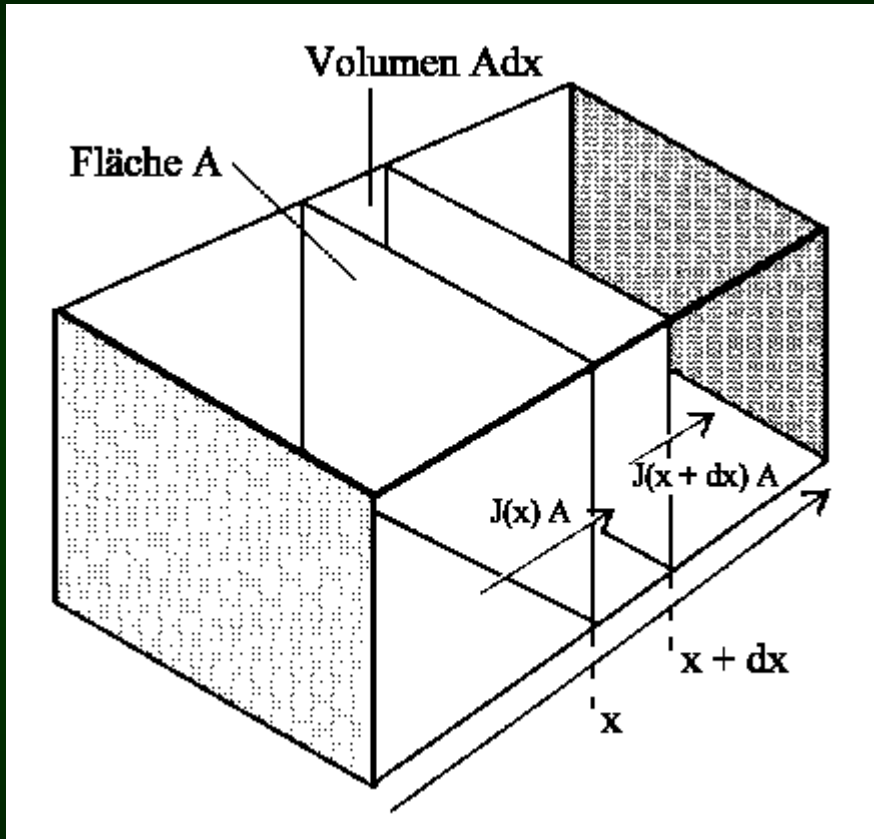
Da auch $\lambda_+ = z_+u_+F$ gilt, erhalten wir:

$$t_+^\circ = v_+\lambda_+/(v_+\lambda_+ + v_-\lambda_-) \quad \text{und} \quad t_-^\circ = v_-\lambda_-/(v_+\lambda_+ + v_-\lambda_-)$$

$$\text{und} \quad v_+\lambda_+ = t_+^\circ \cdot \Lambda_m^\circ \quad \text{und} \quad v_-\lambda_- = t_-^\circ \cdot \Lambda_m^\circ$$

Man kann die Überführungszahlen von Ionen direkt messen und damit die Leitfähigkeit λ_+ , λ_- der einzelnen Ionen und ihre Beweglichkeiten u_+ , u_- bestimmen.

Diffusion – Das 2. Ficksche Gesetz



Zeitliche Änderung der Konzentration $\partial c / \partial t$ (im Teilvolumen $A dx$)

- Zustrom $N = A \cdot J(x)$
- Abfluss $N' = A \cdot J(x + dx)$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{N - N'}{A dx} = \frac{\{J(x) - J(x + dx)\}}{dx} \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{\partial c}{\partial t} = - \frac{\partial J}{\partial x},$$

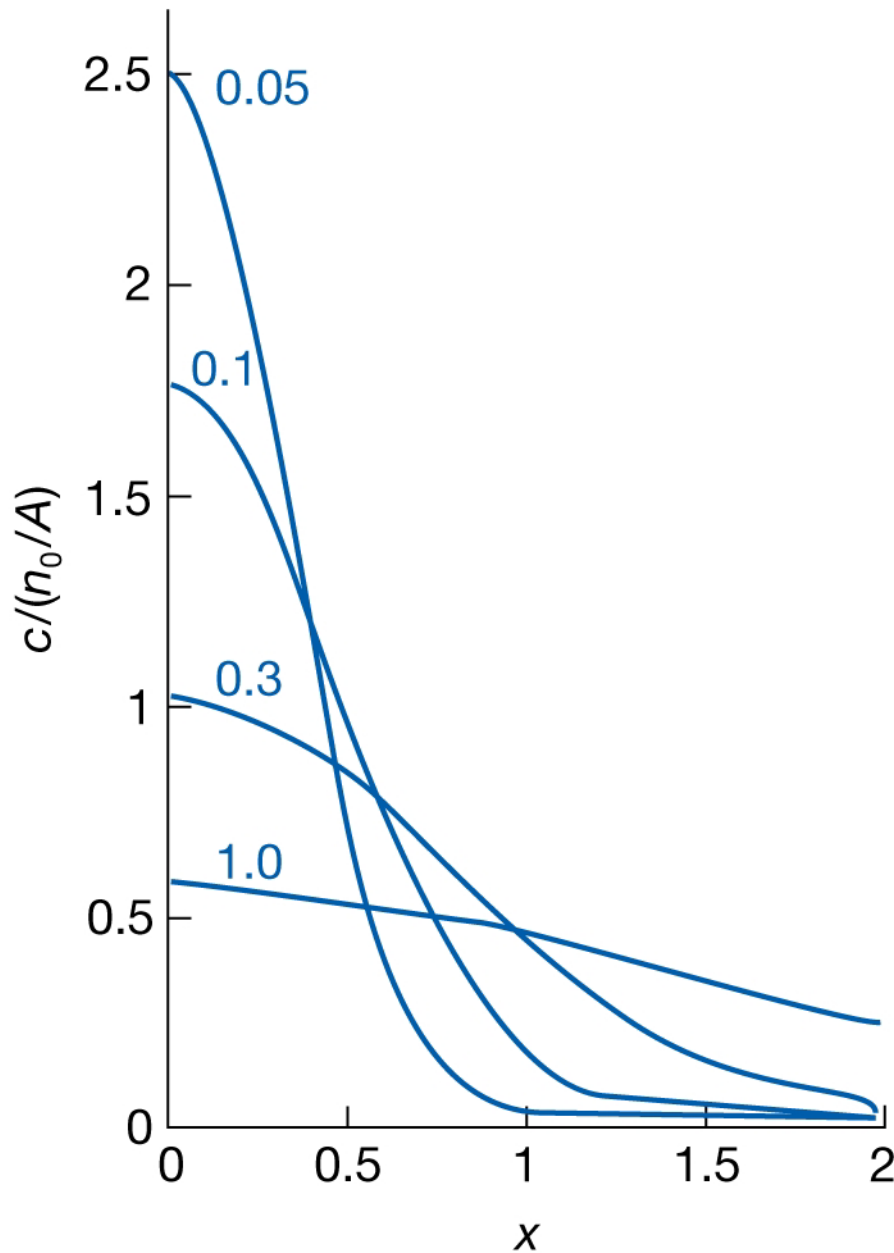
mit 1. Ficksches Gesetz: $J = -D \frac{\partial c}{\partial x}$
folgt das

2. Ficksche Gesetz

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

Diffusion – Das 2. Ficksche Gesetz

Lösungen der Diffusionsgleichung



Lösungen der Diffusionsgleichung

Fläche / eindimensionale Ausbreitung

wir betrachten eine sehr dünne Schicht dx von Teilchen zur Zeit $t=0$. Eine Lösung der Gleichung ist

$$c(x,t) = \alpha \sqrt{t} e^{-x^2/4Dt}$$

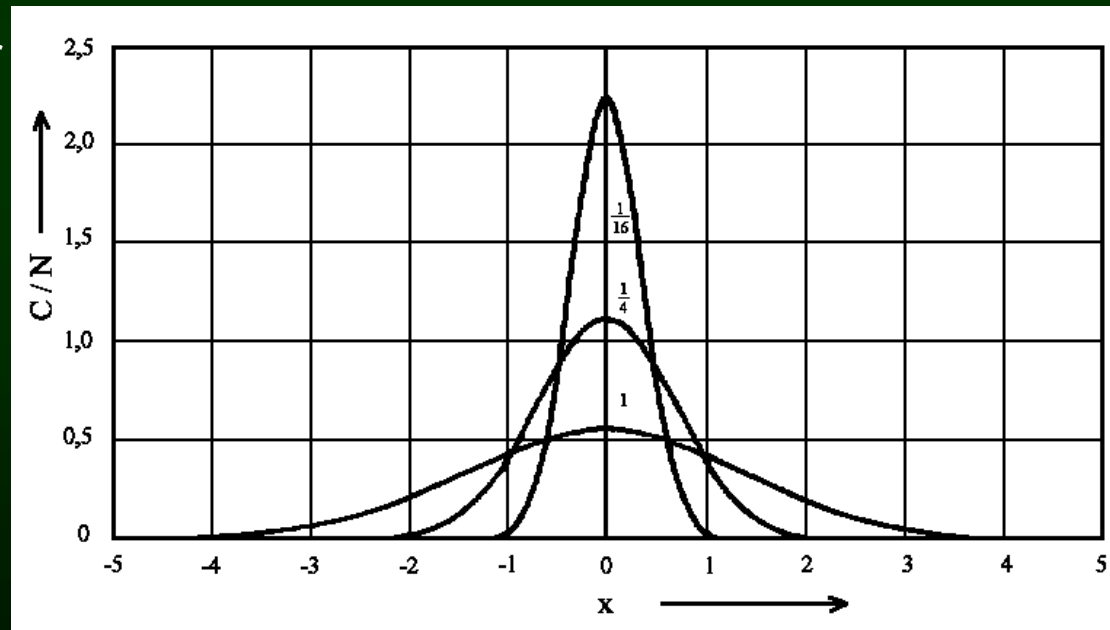
Konstante α entspricht Stärke der Quelle, ersetzen von α ergibt

$$c(x,t) = N_0 / 2A\sqrt{(\pi Dt)} \cdot e^{-x^2/4Dt}$$

Punkt / radiale Ausbreitung

(ohne Herleitung)

$$c(r,t) = 1/8 N_0 \cdot (\pi Dt)^{-3/2} \cdot e^{-r^2/4Dt}$$



Betrachtung auf molekularer Ebene

$P(x)dx$ sei die Wahrscheinlichkeit für das Erreichen des Ortes $x+dx$ durch diffundierende Teilchen

$$P(x)dx = C(x)dx / N_0 = \frac{1}{2} (\pi Dt)^{-1/2} e^{-x^2/4Dt} dx$$

$$P(x)dx = C(x)dx / N_0 = \frac{1}{2(\pi Dt)^{1/2}} \cdot \exp(-x^2/4Dt) dx$$

$\langle x^2 \rangle$ bezeichnet das mittlere Abstandsquadrat von Teilchen nach der Zeit t .

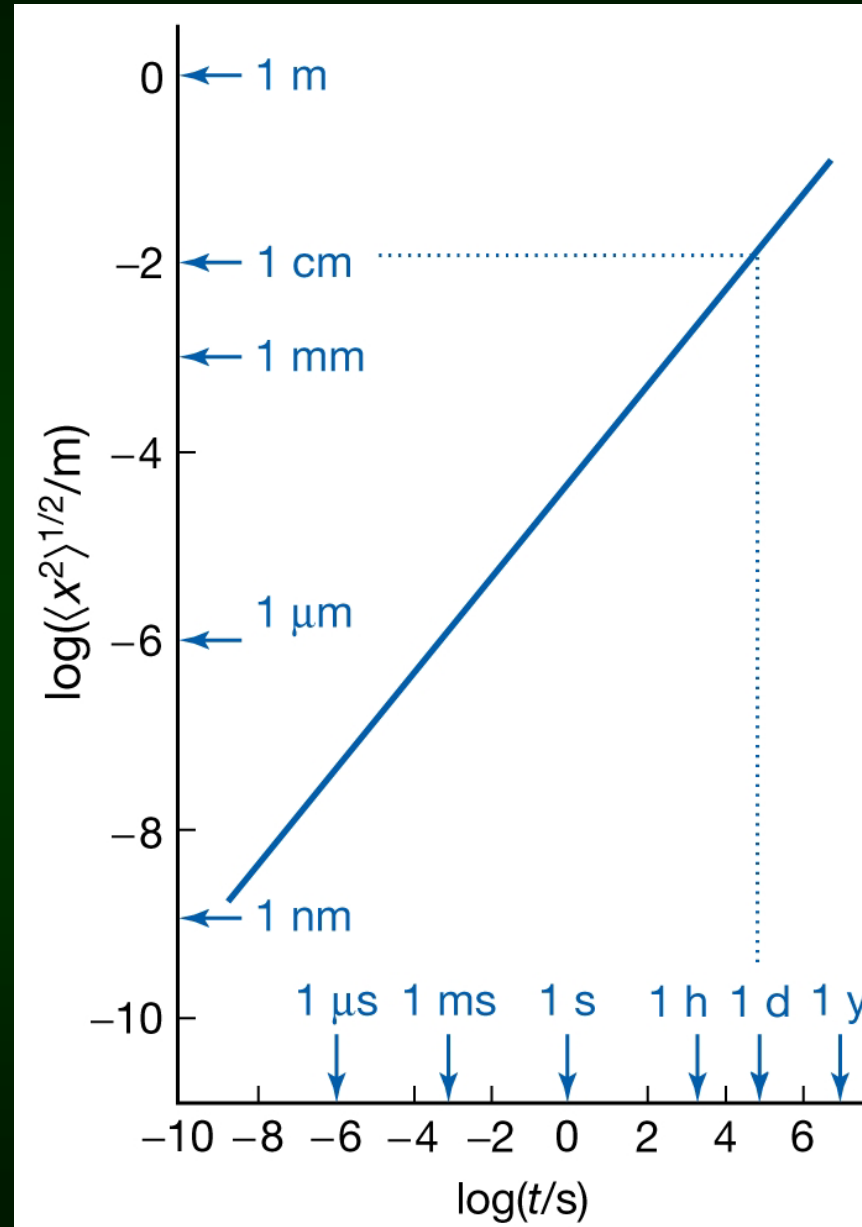
$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P(x) dx$$

Lösen des Integrals

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt$$

Beispiel für Diffusionskoeffizient

Helium in Turmalin: $D = 10^{-8} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$



Wir nehmen an, dass unser Teilchen in einer „Zustands-Lebensdauer / Zeit“ τ einen Sprung der Länge s ausführen kann. Es legt daher in der Zeit t eine Entfernung $t \cdot s/\tau$ zurück.

Eine statistische Analyse liefert für die Wahrscheinlichkeit, dieses Teilchen nach der Zeit t in einer Entfernung x vom ursprünglichen Ort anzutreffen

$$P = \sqrt{\frac{2\tau}{\pi t}} \cdot e^{-x^2\tau/2ts^2}$$

Die **Einstein-Smoluchowski-Gleichung** verbindet den Diffusionskoeffizienten D mit Schrittweite s und „Zustands-Lebensdauer“ τ

$$D = s^2/2\tau$$

Wir können

- s/τ als mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ interpretieren
- s als mittlere freie Weglänge

So wird aus der Einstein-Smoluchowski-Gleichung der Ausdruck,

$$D = \langle v \rangle s/2 \equiv 1/2 \langle v \rangle \lambda$$

der aus der Diffusionsgleichung hervorging

Die Diffusion in idealen Gasen ist also nur eine ungeordnete Bewegung mit der mittleren freien Weglänge als mittlerer Schrittweite

Konvektion

Der Transport von Teilchen durch eine *strömende* Flüssigkeit wird als Konvektion bezeichnet. Wenn wir die Diffusion vernachlässigen, dann ist der Teilchenfluss für einer Strömung der Geschwindigkeit v .

$$J_N = cV / A\Delta t = cAv\Delta t / A\Delta t = c v$$

Diesen Fluß nennen wir **Konvektionsfluß**. Mit den gleichen Argumenten wie zuvor erhalten wir für die Konzentrationsänderung in einem Quader mit der Länge dx und dem Querschnitt A

$$dc/dt = \{J(x) - J(x+dx)\} / dx = \{c - [c + (\partial c / \partial x)dx]\}v / dx = -v \partial c / \partial x$$

Die Gesamtänderung der Konzentration unter Berücksichtigung von Diffusion und Konvektion beschreibt die **verallgemeinerte Diffusionsgleichung**

$$\partial c / \partial t = D \cdot \partial^2 c / \partial x^2 - v \partial c / \partial x$$

Solvatisierung von Ionen

Lösen entspricht dem **Trennen von Ionen** in einem Lösungsmittel.
Dessen Dielektrizitätskonstante ϵ spielt dabei eine entscheidende Rolle.

Vergleichsrechnung:

Ein Ionenpaar Na^+Cl^- soll einmal im Vakuum, ohne Dielektrikum, und einmal in Wasser (einem Dielektrikum mit $\epsilon = 78,5$) von einem Abstand 0,2 nm ausgehend in unendliche Entfernung voneinander gebracht werden.

Vakuum

$$\begin{aligned}\Delta E &= \int_{0,2\text{nm}}^{\infty} F dr = \int_{0,2\text{nm}}^{\infty} e_1 e_2 / 4\pi\epsilon_0 r^2 dr \\ &= 1,15 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 7,19 \text{ eV}\end{aligned}$$

Wasser

$$\begin{aligned}\Delta E &= \int_{0,2\text{nm}}^{\infty} F dr = \int_{0,2\text{nm}}^{\infty} e_1 e_2 / 4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2 dr \\ &= 1,47 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0,0915 \text{ eV}\end{aligned}$$