Lösungen zum Übungsblatt 1

Aufgabe 1

a) Relativ zur ISS haben die N_2-Moleküle eine Geschwindigkeit von Null, da sie als ruhend angenommen werden sollen. Damit ist nach der kinetischen Gastheorie ihre Energie relativ zur ISS betrachtet ebenfalls Null.

b) Für die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit eines Gases gilt

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$T = \frac{M}{3R} \langle \mathrm{v}^2 \rangle$$

$$\underline{T = 63146\,\mathrm{K}}$$

Aufgabe 2

a) Die zu untersuchende Funktion lautet:

$$F(\mathrm{v}) = A v^2 \mathrm{e}^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \quad \text{mit} \quad A = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle ist:

$$F'(\mathrm{v}) = 0$$

Unter Berücksichtigung der Produkt- und Kettenregel ergibt sich:

$$F'(v) = 2Av\,\mathrm{e}^{-\frac{Mv^2}{2RT}} - Av^2 \frac{Mv}{RT} \mathrm{e}^{-\frac{Mv^2}{2RT}}$$

$$F'(v) = Av\,\mathrm{e}^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \left(2 - v^2 \frac{M}{RT}\right)$$

Die in der letzten Zeile angegebene weitestgehend faktorisierte Form der Ableitung ist zur Bestimmung der Nullstellen am geeignetsten. Da die Geschwindigkeitsverteilung erst bei $v = 0$ beginnt und der Exponentialterm nur für unendlich große Geschwindigkeiten Null wird, lässt sich das Problem auf den zweiten Faktor reduzieren:

$$0=2-v^2\frac{M}{RT}$$

Nach v umgestellt, ergeben sich zwei Lösungen:

$$v_1=\sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad \text{und} \quad v_2=-\sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

Da negative Geschwindigkeiten physikalisch keinen Sinn machen, ist v_1 unser gesuchtes v_m. Um zu überprüfen, ob es sich um ein Maximum handelt, muss die zweite Ableitung zurate gezogen werden:

$$F''(v)=(A\mathrm{e}^{-\frac{Mv^2}{2RT}}-Av\frac{Mv}{RT}\mathrm{e}^{-\frac{Mv^2}{2RT}})(2-\frac{Mv^2}{RT})-Av\,\mathrm{e}^{-\frac{Mv^2}{2RT}}\frac{2Mv}{RT}$$

$$F''(v)=A\mathrm{e}^{-\frac{Mv^2}{2RT}}(1-\frac{Mv^2}{RT})(2-\frac{Mv^2}{RT})-A\mathrm{e}^{-\frac{Mv^2}{2RT}}\frac{2Mv^2}{RT}$$

$$F''(v)=A\mathrm{e}^{-\frac{Mv^2}{2RT}}[(1-\frac{Mv^2}{RT})(2-\frac{Mv^2}{RT})-\frac{2Mv^2}{RT}]$$

$$F''(v)=A\mathrm{e}^{-\frac{Mv^2}{2RT}}[2-\frac{5Mv^2}{RT}+(\frac{Mv^2}{RT})^2]$$

Durch Einsetzen von v_m erhält man:

$$F''(\sqrt{\frac{2RT}{M}})=-4A\mathrm{e}^{-1}$$

Da A positiv ist, ist das Gesamtergebnis negativ. Damit ist es ein Maximum.

Der Wert der Verteilungsfunktion beim Maximum beträgt:

$$F(v_m) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2RT}{M} \cdot e^{-\frac{M}{2RT} \cdot \frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{8M}{\pi RT}} \cdot e^{-1}$$

b) $$v_m(2T) = \frac{\sqrt{2R \cdot 2T}}{M} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{2} v_m$$

$$F(v_m(2T)) = \sqrt{\frac{8M}{\pi R 2T}} \cdot e^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{8M}{\pi RT}} \cdot e^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot F(v_m(T)) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot F(v_m(T))$$

Wenn die Temperatur verdoppelt wird, vergrößert sich v_m um den Faktor $\sqrt{2}$ und *F(v_m)* ändert sich um den Faktor $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$.

Aufgabe 3

a) Anstatt das Integral

$$\int_{600\,\mathrm{m/s}}^{650\,\mathrm{m/s}} F(v)\,\mathrm{d}v$$

zu lösen, kann vereinfacht angenommen werden, das die zu berechnende Fläche unter der Verteilungsfunktion ein Rechteck ist. Die Fläche wird dann über

$$A = F(v) \cdot \Delta v$$

mit *F(v)* und Δv als Kantenlängen berechnet. Δv ist die Breite des Rechtecks und beträgt hier 50 m/s. Zur Berechnung der Höhe wird die Mitte des gegebenen Geschwindigkeitsbereiches in die Verteilungsfunktion eingesetzt. Aus diesen Überlegungen ergibt sich ein Anteil von:

$$F\left(625\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \cdot 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}058$$

Also besitzen ca. 5,8 % der Sauerstoffmoleküle eine Geschwindigkeit im betrachteten Bereich.

b) Zum Skizzieren der Geschwindigkeitsverteilung werden einige Punkte benötigt. Der erste Punkt stellt der Koordinatenursprung dar. Als nächstes kann das Maximum der Funktion berechnet werden. Die dazu benötigten Formeln wurden in Aufgabe 2 bereits hergeleitet.

$$v_m = \sqrt{\frac{2RT}{\mathrm{M}}} \approx 395\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Der dazugehörige Funktionswert beträgt:

$$F\left(395\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = \sqrt{\frac{8M}{\pi RT}} \cdot \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}0021\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}$$

Aus dem Aufgabenteil a) geht noch ein weiterer Punkt hervor. Demnach beträgt der Funktionswert bei 625 m/s ca. 0,0012 s/m.

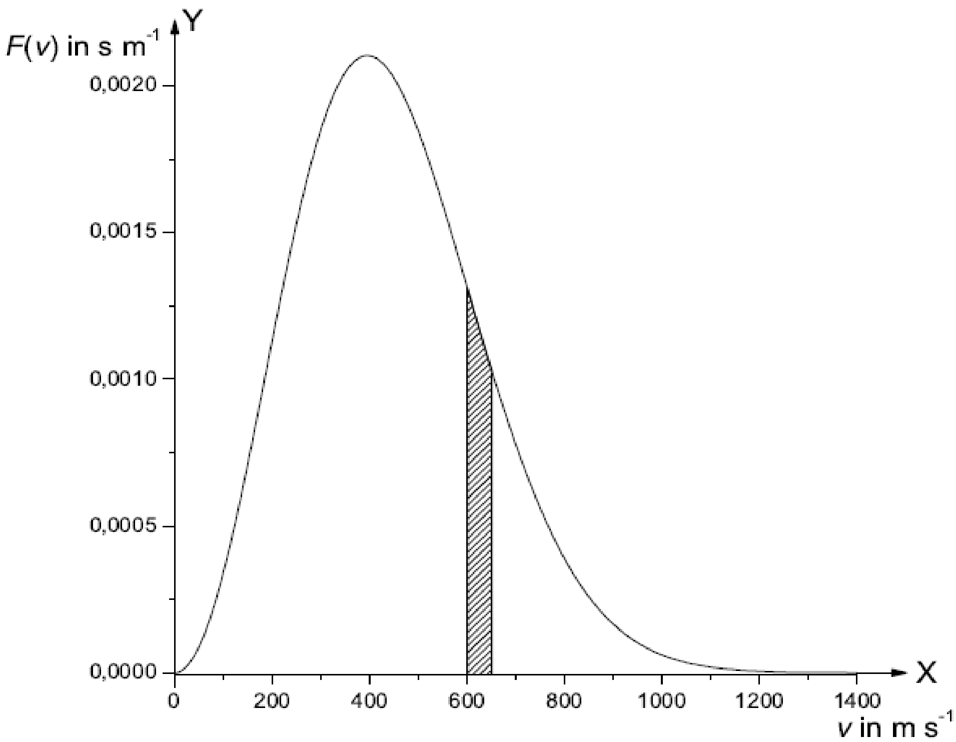

Abbildung 1: Geschwindigkeitsverteilung von Sauerstoffmolekülen bei 300 K. Der markierte Bereich erstreckt sich von 600 m/s bis 650 m/s.