Lösungen zum Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Für den ersten angeregten Zustand gilt:

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$$

Der energetische Abstand ΔE ist gegeben mit 0,184 eV. Das entspricht einer Energie von $2{,}948 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J}$. Bei der entsprechenden Temperatur ergibt sich ein Verhältnis von:

$$\frac{N_2}{N_1} = 6{,}84 \cdot 10^{-4} \quad \text{bei}\ 20\,°\mathrm{C}$$

$$\frac{N_2}{N_1} = 0{,}111 \quad \text{bei}\ 700\,°\mathrm{C}$$

Da die energetischen Abstände zwischen den Schwingungsniveaus jeweils gleich sind, ist der Abstand zwischen dem Grundzustand und dem zweiten Niveau doppelt so groß wie die gegebene Energiedifferenz. Also:

$$\frac{N_3}{N_1} = e^{-\frac{2\cdot\Delta E}{kT}}$$

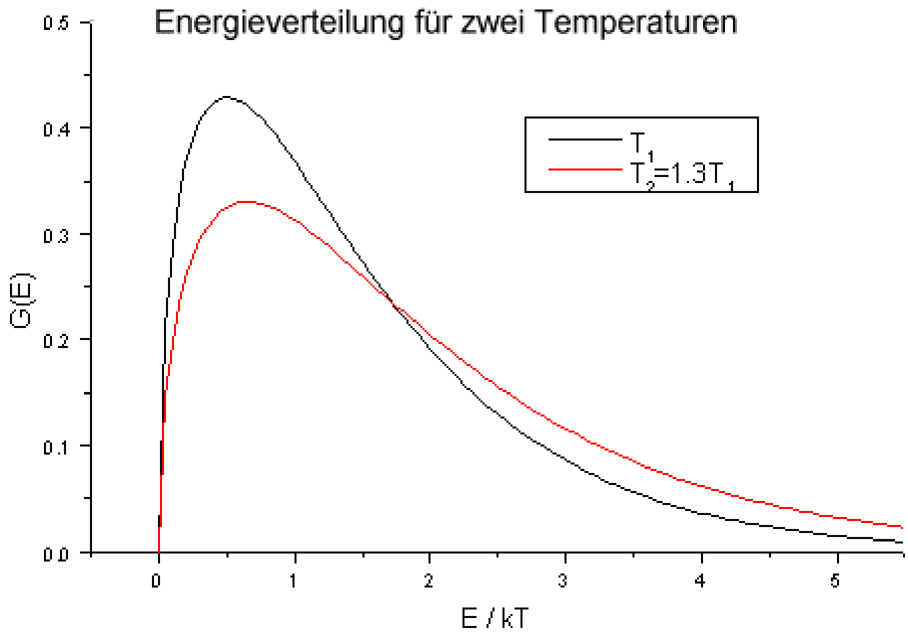
Demnach ergeben sich folgende Verhältnisse:

$$\frac{N_3}{N_1} = 4{,}68 \cdot 10^{-7} \quad \text{bei}\ 20\,°\mathrm{C}$$

$$\frac{N_3}{N_1} = 0{,}012 \quad \text{bei}\ 700\,°\mathrm{C}$$

Aufgabe 2

a) In der folgenden Abbildung ist die Energieverteilung für zwei verschiedene Temperaturen gegeben. Verlangt war allerdings nur eine allgemeine Darstellung.



b) Zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Energie muss das Maximum der Funktion *G(E)* berechnet werden. Die Funktion lautet:

$$G(E) = A \cdot E^{1/2} e^{-E/kT} \quad \text{mit } A = 2\pi(\pi k T)^{-3/2}$$

Die Ableitung ist dementsprechend:

$$G'(E) = A \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot E^{-1/2} \cdot e^{-E/kT} - E^{1/2} \cdot e^{-E/kT} \cdot \frac{1}{kT} \right)$$

$$G'(E) = A \cdot E^{1/2} \cdot e^{-E/kT} \cdot \left(\frac{1}{2E} - \frac{1}{kT} \right)$$

Da die e-Funktion nicht Null werden kann, ist nur der Klammerausdruck für die Nullstellenberechnung interessant.

$$0=\frac{1}{2E}-\frac{1}{kT}$$

$$E=E_{max}=\frac{kT}{2}$$

Zur Überprüfung, ob das Ergebnis ein Maximum ist, muss die zweite Ableitung gebildet werden:

$$G''(E)=A\cdot E^{1/2}\cdot e^{-E/kT}\left[\left(\frac{1}{2E}-\frac{1}{kT}\right)^2-\frac{1}{2E^2}\right]$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt:

$$G''(E_{max})=-\sqrt{2}\,A(kT)^{-3/2}e^{-1/2}$$

Da A positiv ist, ist das Gesamtergebnis negativ. Somit ist es ein Maximum.

c) Die mittlere Energie ergibt sich durch folgende Integration:

$$E_{mittel}=\int_0^\infty G(E)\cdot E\,\mathrm{d}E=A\cdot\int_0^\infty \frac{E^{3/2}}{e^{E/kT}}\,\mathrm{d}E$$

Bei der Benutzung des Hilfsintegrals ist zu beachten, dass der Parameter a dem Ausdruck $\frac{1}{kT}$ entspricht. Damit ergibt sich für die mittlere Energie:

$$E_{mittel}=\frac{3}{4}A\sqrt{\pi(kT)^5}=\frac{3}{2}kT$$

Aufgabe 3

Die Stoßzahl z ist gegeben durch:

$$z=\sqrt{2}\sigma\langle v\rangle\frac{p}{kT}=\sqrt{2}\sigma\left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2}\frac{p}{kT}=\frac{4\sigma p}{\sqrt{\pi mkT}}$$

Der Stoßquerschnitt beträgt $4{,}3\cdot10^{-19}\,\mathrm{m}^2$, die Masse eines Stickstoffmoleküls $4{,}6518\cdot10^{-26}\,\mathrm{kg}$, der Druck 101.325 Pa und die Temperatur 298,15 K. Somit ergibt sich eine Stoßzahl von:

$$z=7{,}106\cdot10^{9}\,\mathrm{s}^{-1}$$

Die Zeit zwischen den Stößen entspricht der reziproken Stoßzahl:

$$t=\frac{1}{z}=1{,}407\cdot10^{-10}\,\mathrm{s}$$

Die mittlere freie Weglänge beträgt:

$$\lambda=\frac{\langle v\rangle}{z}=\frac{kT}{\sqrt{2}\sigma p}=6{,}68\cdot10^{-8}\,\mathrm{m}$$

Aufgabe 4

Zunächst wird der Luftdruck in 10 km Höhe benötigt. Dieser kann über die barometrische Höhenformel berechnet werden:

$$p(h)=p_0\cdot \mathrm{e}^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

Der Parameter p_0 ist der Luftdruck auf Meereshöhe und beträgt 10^5 Pa. Die Größe g ist die Fallbeschleunigung. M ist hier die mittlere molare Masse von Luft und ergibt sich zu:

$$M=\frac{0{,}78\,M(N_2)+0{,}21\,M(O_2)}{0{,}99}=28{,}8\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$$

Der Druck in 10 km Höhe beträgt also:

$$p(10\,\mathrm{km})=31971\,\mathrm{Pa}$$

a) Der Fall O_2,O_2

$$z = \langle v \rangle \sigma \frac{p}{RT} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \sigma(O_2) \frac{p}{kT}$$

Hier wird die reduzierte Masse μ benötigt:

$$\mu(O_2, O_2) = \frac{M(O_2) \cdot M(O_2)}{M(O_2) + M(O_2)} = \frac{1}{2} M(O_2) = 16 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$$

Da es hierbei nur Stöße zwischen Sauerstoffmolekülen gibt, kann direkt der Stoßquerschnitt von Sauerstoff genommen werden. So ergibt sich eine Stoßzahl von:

$$z = 1{,}95 \cdot 10^9 \,\mathrm{s}^{-1}$$

b) Der Fall N_2,O_2

Hier treffen unterschiedliche Stoßpartner aufeinander. Also muss zuerst ein mittlerer Stoßquerschnitt berechnet werden. Dazu werden die Moleküldurchmesser benötigt:

$$d(O_2) = \sqrt{\frac{\sigma(O_2)}{\pi}} = 0{,}357 \,\mathrm{nm}$$

$$d(N_2) = \sqrt{\frac{\sigma(N_2)}{\pi}} = 0{,}370 \,\mathrm{nm}$$

Der effektive Durchmesser ergibt sich aus dem Mittelwert beider Durchmesser:

$$d(N_2, O_2) = 0{,}364 \,\mathrm{nm}$$

Der daraus resultierende Stoßquerschnitt beträgt:

$$d(N_2, O_2) = \pi d^2(N_2, O_2) = 0{,}415 \,\mathrm{nm}^2$$

Die reduzierte Masse ergibt sich zu:

$$\mu(N_2, O_2) = \frac{M(N_2) \cdot M(O_2)}{M(N_2) + M(O_2)} = 14{,}9\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$$

Schließlich kann die Stoßzahl berechnet werden:

$$z = 2{,}10 \cdot 10^9\,\mathrm{s}^{-1}$$