

Lösungen zum Übungsblatt 3

Aufgabe 1

a) Der einfache Ansatz zur Berechnung des Wärmeleitkoeffizienten lautet:

$$\kappa = \frac{1}{3} C_{v,m} \lambda \langle v \rangle \frac{n}{V}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad \lambda = \frac{RT}{\sqrt{2} \sigma p N_A} \quad \frac{n}{V} = \frac{p}{RT}$$

ergibt sich für den Wärmeleitkoeffizienten:

$$\kappa = \frac{2}{3} \frac{C_{v,M}}{\sigma N_A} \sqrt{\frac{RT}{\pi M}}$$

Für Argon beträgt der Wärmeleitkoeffizient:

$$\kappa(\text{Ar}) = 5,19 \cdot 10^{-3} \frac{\text{J}}{\text{Kms}}$$

Für den Wärmefluss gilt:

$$J_E = -\kappa \frac{dT}{dx} = \kappa \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Dabei wird in diesem Fall der Differenzialquotient einfach durch den Differenzenquotienten ersetzt und das Minus kann auch weggelassen werden, wenn man für ΔT und Δx positive Werte einsetzt. Die Wärme fließt natürlich von der Fläche mit 315 K zur Fläche mit 295 K, womit $\Delta T = 20$ K ist. Δx entspricht dann einfach der Kantenlänge des Würfels, die 10 cm = 0,1 m beträgt. Somit ergibt sich für den Wärmefluss:

$$J_E = 1,038 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

b) Analog erfolgen die Berechnungen mit Kohlendioxid.

$$\kappa(\text{CO}_2) = 7,99 \cdot 10^{-3} \frac{\text{J}}{\text{Kms}} \quad \text{und} \quad J_E = 1,597 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Aufgabe 2

Der Diffusionskoeffizient ist definiert durch die Gleichung:

$$D = \frac{1}{2} \langle v \rangle \lambda$$

Weiterhin sind die Formeln für die mittlere Geschwindigkeit und die mittlere freie Weglänge bekannt, die in die obige Gleichung eingesetzt werden können:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{RT}{\sqrt{2} \sigma p N_A}$$

Um das Verhältnis zwischen den Diffusionskoeffizienten bei unterschiedlichen Temperaturen zu bilden, werden sie durcheinander geteilt:

$$\frac{D(T_1)}{D(T_2)} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8RT_1}{\pi M}} \frac{RT_1}{\sqrt{2} \sigma p_1 N_A}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8RT_2}{\pi M}} \frac{RT_2}{\sqrt{2} \sigma p_2 N_A}} = \frac{\sqrt{T_1} \frac{T_1}{p_1}}{\sqrt{T_2} \frac{T_2}{p_2}}$$

Da die Drücke ebenfalls temperaturabhängig sind, müssen auch sie als unterschiedlich betrachtet werden. Der Quotient T/p ergibt sich aus dem idealen Gasgesetz:

$$pV = nRT \rightarrow \frac{T}{p} = \frac{V}{nR}$$

Das Volumen V ist durch das geschlossene Gefäß festgelegt und somit bei einer

Temperaturänderung konstant. Die Stoffmenge n ändert sich ebenfalls nicht. Das bedeutet, dass der Quotient T/p insgesamt konstant bleibt:

$$\frac{T_1}{p_1} = \frac{T_2}{p_2} = \text{konst.}$$

Somit kürzen sich diese Quotienten weg, sodass nur noch folgender Ausdruck übrig bleibt:

$$\frac{D(T_1)}{D(T_2)} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

Nun kann das Verhältnis berechnet werden:

$$\frac{D(T_1)}{D(T_2)} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \sqrt{\frac{300\text{K}}{30\text{K}}} = \sqrt{10} \approx 3,162$$

Aufgabe 3

Das mittlere Verschiebungsquadrat berechnet sich aus:

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt$$

Die Gleichungen

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad \lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma p} \quad D = \frac{1}{2} \langle v \rangle \lambda$$

können in die obige eingesetzt und diese dann nach der Zeit umgestellt werden:

$$t = \langle x^2 \rangle \sqrt{\frac{\pi M}{8RT}} \frac{\sqrt{2}\sigma p}{kT}$$

Das mittlere Verschiebungsquadrat ist das Quadrat der zurückgelegten Strecke, hier also 1 m und die molare Masse M bezieht sich hier auf die Luft. So ergibt sich für die Zeit:

$$t = 3,7 \cdot 10^9 \text{ s} \approx 118 \text{ Jahre!}$$

In der Realität geschieht die Ansteckung leider schneller. Die Diffusion spielt dabei eine vernachlässigbare Rolle, wie das Ergebnis eindeutig zeigt. Luftströmungen (Konvektion) beschleunigen die Bewegungen enorm und sorgen somit für eine deutlich schnellere Ansteckung.

Aufgabe 4

Gegeben sind folgende Viskositäten:

$$\eta(\text{He}) = 187 \mu\text{P} = 187 \cdot 10^{-7} \text{ Pa}$$

$$\eta(\text{N}_2) = 166 \mu\text{P} = 166 \cdot 10^{-7} \text{ Pa}$$

$$\eta(\text{CO}_2) = 136 \mu\text{P} = 136 \cdot 10^{-7} \text{ Pa}$$

$$\eta(\text{H}_2) = 84 \mu\text{P} = 84 \cdot 10^{-7} \text{ Pa}$$

Dabei ist die Umrechnung $1 \text{ P} = 10^{-1} \text{ Pa}$ zu beachten.

Der Viskositätskoeffizient ist gegeben durch:

$$\eta = \frac{1}{3} m \langle v \rangle \lambda \frac{N}{V}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad \lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma p} \quad \frac{N}{V} = \frac{p}{kT}$$

und Umstellung nach dem Stoßquerschnitt ergibt sich:

$$\sigma = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{kTm}{\pi}} \frac{1}{\eta}$$

Die daraus resultierenden Stoßquerschnitte sind:

$$\sigma(\text{He})=0,101 \text{ nm}^2$$

$$\sigma(\text{N}_2)=0,300 \text{ nm}^2$$

$$\sigma(\text{CO}_2)=0,459 \text{ nm}^2$$

$$\sigma(\text{H}_2)=0,158 \text{ nm}^2$$

Ein Vergleich mit den Literaturwerten

$$\sigma(\text{He})=0,21 \text{ nm}^2$$

$$\sigma(\text{N}_2)=0,43 \text{ nm}^2$$

$$\sigma(\text{CO}_2)=0,52 \text{ nm}^2$$

$$\sigma(\text{H}_2)=0,27 \text{ nm}^2$$

zeigt, dass die berechneten Werte deutlich zu klein sind. Daher ist mithilfe der Viskositäten nur eine grobe Abschätzung möglich.