

Lösungen zum Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Für die radiale Ausbreitung erhält man als Lösung für das 2. Fick'sche Gesetz:

$$c(r, t) = \frac{n_0}{8(\pi D t)^{3/2}} \cdot e^{-r^2/4Dt}$$

Die Stoffmenge n_0 bezieht sich auf die gesamte Stoffmenge an Saccharose, die in dem Zuckerwürfel enthalten ist. Über die Gleichungen

$$n_0 = \frac{m}{M} \quad m = \rho V \quad V = a^3$$

kann für die Stoffmenge n_0 folgende Beziehung formuliert werden:

$$n_0 = \frac{\rho a^3}{M}$$

ρ ist die Dichte von Saccharose, a die Seitenlänge des Zuckerwürfels und M die molare Masse von Saccharose. Damit ergibt sich eine Stoffmenge von:

$$n_0 = 4,64 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

Durch Einsetzen der Stoffmenge und der gegebenen Größen in die Formel für die radiale Ausbreitung ergibt sich für unterschiedliche Zeiten

in 5 cm Entfernung:

$$c(5 \text{ cm}, 1 \text{ s}) \approx 0 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$$

$$c(5 \text{ cm}, 1 \text{ d}) = 3,26 \cdot 10^{-4} \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$$

$$c(5\text{ cm}, 1000\text{ a}) = 1,56 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$$

in 5 m Entfernung:

$$c(5\text{ m}, 1\text{ s}) \approx 0 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$$

$$c(5\text{ m}, 1\text{ d}) \approx 0 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$$

$$c(5\text{ m}, 1000\text{ a}) = 1,07 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$$

Aufgabe 2

Der Gesamtdruck des Systems ergibt sich aus der Summe der Partialdrücke aller gasförmigen Stoffe:

$$p_{\text{Ges}} = p(\text{AsH}_3) + p(\text{H}_2)$$

Die gesamte Stoffmenge der Gasphase beträgt:

$$n_{\text{Ges}} = n(\text{AsH}_3) + 1,5n(\text{H}_2)$$

Über das ideale Gasgesetz kann der Druck eines Gases mit seiner Konzentration in Verbindung gebracht werden:

$$pV = nRT \rightarrow p = \frac{n}{V}RT = cRT$$

Zu Beginn der Reaktion ($t=0$) ist das Arsin (AsH_3) das einzige Gas. Somit trägt es als einzige Komponente zum Druck bei. So kann über den Anfangsdruck (210 kPa) die Konzentration berechnet werden:

$$[\text{AsH}_3]_0 = \frac{p_0}{RT} = 84,72 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$$

Nach vier Stunden beträgt der Gesamtdruck 245 kPa und dieser setzt sich aus den Drücken von Arsin und Wasserstoff zusammen. Dabei hat sich die Konzentration des Arsins stöchiometrisch um die des Wasserstoffs verringert. Somit ergibt sich der Gesamtdruck zu:

$$p_{Ges} = ([AsH_3]_0 - x)RT + 1,5xRT$$

$$p_{Ges} = RT([AsH_3]_0 + 0,5x)$$

Umstellen nach x liefert die Wasserstoffkonzentration:

$$x = 2 \left(\frac{p_{Ges}}{RT} - [AsH_3]_0 \right) = 28,24 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$$

Nun kann die Arsinkonzentration nach vier Stunden berechnet werden:

$$[AsH_3]_{4h} = [AsH_3]_0 - x = 56,48 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$$

Die Zersetzung von Arsin ist eine Reaktion erster Ordnung. Somit gilt:

$$[AsH_3]_t = [AsH_3]_0 \cdot e^{-kT}$$

Daraus kann die Geschwindigkeitskonstante berechnet werden:

$$k = \frac{1}{t} \cdot \ln \frac{[AsH_3]_0}{[AsH_3]_t} = 2,816 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

Die Reaktionsgeschwindigkeit beträgt:

$$v = -\frac{d[AsH_3]}{dt} = \frac{\Delta[AsH_3]}{\Delta t} = 1,961 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mol}}{\text{l} \cdot \text{s}}$$

Aufgabe 3

a) Die Aktivität r wird nach folgender Formel berechnet:

$$r = \frac{N \cdot \ln 2}{t_{1/2}}$$

Mit einer Restaktivität von 0,18 Bq nach neun Jahren ergibt sich eine Atomanzahl von:

$$N = \frac{r \cdot t_{1/2}}{\ln 2} = 3,1 \cdot 10^6$$

Dies ist die Menge, die heute noch vorhanden ist. Mit dieser kann die ursprüngliche Menge an Polonium über das Zerfallsgesetz berechnet werden:

$$N_0 = N \cdot \exp\left(\frac{\ln 2}{t_{1/2}} \cdot t\right) = 4,4 \cdot 10^{13}$$

b) Um herauszufinden, um wievielfach höher die Aktivität anfangs war, wird das Verhältnis zwischen der damaligen und heutigen Aktivität gebildet:

$$r_0/r = \frac{N_0 \cdot \ln 2}{t_{1/2}} / 0,18 \text{ Bq} = 1,4 \cdot 10^7$$

c) Angenommen, die Poloniummenge war 1000fach höher, als in a) berechnet, so ergibt sich eine Menge von:

$$m = 1000 \cdot m_0 = 1000 \cdot n_0 \cdot M = 1000 \cdot \frac{N_0}{N_A} \cdot M = 15,3 \mu\text{g}$$

Diese Menge wäre tödlich gewesen...

Aufgabe 4

Für die Verseifung von Essigsäureethylester gilt folgendes Geschwindigkeitsgesetz:

$$\frac{d[\text{Ester}]}{dt} = -k[\text{Ester}][\text{NaOH}] = -k[\text{Ester}]^2$$

Hierbei wird angenommen, dass die Konzentrationen der Edukte gleich sind.

Diese Differentialgleichung muss nun gelöst werden.

$$\int_{[\text{Ester}]_0}^{[\text{Ester}]_t} \frac{d[\text{Ester}]}{[\text{Ester}]^2} = -k \int_0^t dt$$

$$\left[-\frac{1}{[\text{Ester}]} \right]_{[\text{Ester}]_0}^{[\text{Ester}]_t} = -kt$$

$$-\frac{1}{[\text{Ester}]_t} + \frac{1}{[\text{Ester}]_0} = -kt$$

$$k = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{[\text{Ester}]_t} - \frac{1}{[\text{Ester}]_0} \right)$$

Nun kann die Geschwindigkeitskonstante berechnet werden:

$$k = 1,17 \cdot 10^{-4} \frac{\text{l}}{\text{mol} \cdot \text{s}}$$

Die Halbwertszeit ist die Zeit, zu der nur noch die Hälfte der Eduktmenge vorhanden ist.

Demnach kann formuliert werden:

$$t_{1/2} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{0,5[\text{Ester}]_0} - \frac{1}{[\text{Ester}]_0} \right) = \frac{1}{k} \left(\frac{2}{[\text{Ester}]_0} - \frac{1}{[\text{Ester}]_0} \right) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{[\text{Ester}]_0}$$

Somit beträgt die Halbwertszeit:

$$t_{1/2} = 4281 \text{ s} = 1 \text{ h } 11,35 \text{ min}$$