Lösungen zum Übungsblatt 9

Aufgabe 1

Gegeben ist die Formel:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = -2{,}303 \cdot I\, c\, \epsilon$$

Durch Trennung der Variablen kann diese Differentialgleichung gelöst werden:

$$\int_{I_0}^{I} \frac{\mathrm{d}I}{I} = -2{,}303 \cdot c\, \epsilon \int_0^x \mathrm{d}x$$

$$\left[\ln(I)\right]_{I_0}^{I} = -2{,}303\, c\, \epsilon\, x$$

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -2{,}303\, c\, \epsilon\, x$$

$$\frac{I}{I_0} = \mathrm{e}^{-2{,}303 \cdot c\, \epsilon\, x}$$

Häufig ist das Lambert-Beersche Gesetz auf die Basis 10 bezogen. Um das zu erreichen, wird die letzte Gleichung mit dem dekadischen Logarithmus logarithmiert:

$$\lg\left(\frac{I}{I_0}\right) = \lg\left(\mathrm{e}^{-2{,}303 \cdot c\epsilon\, x}\right)$$

$$\lg\left(\frac{I}{I_0}\right) = -2{,}303 \cdot c\, \epsilon\, x \cdot \lg(\mathrm{e})$$

Der Zahlenwert 2,303 entspricht ln(10). Der Wert lg(e) entspricht $\frac{1}{\ln(10)}$. Somit ergibt sich:

$$\lg\left(\frac{I}{I_0}\right) = -c\, \epsilon\, x$$

Nach Aufhebung der Logarithmierung erhält man:

$$\frac{I}{I_0} = 10^{-c\epsilon x}$$

$$I = I_0 \cdot 10^{-c\epsilon x}$$

Aufgabe 2

a) Hier findet das Lambert-Beersche Gesetz Anwendung:

$$I = I_0 \cdot 10^{-\alpha x}$$

Durch Umstellen nach dem Absorptionskoeffizienten ergibt sich:

$$\alpha = -\lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \cdot \frac{1}{x}$$

Durch Einsetzen der gegebenen Größen erhält man einen Wert von:

$$\epsilon = -\lg\left(\frac{0{,}3}{1}\right) \cdot \frac{1}{0{,}1\,\mathrm{cm}} = 5{,}23\,\mathrm{cm}^{-1}$$

b) Mithilfe des Lambert-Beerschen Gesetzes kann berechnet werden, wie viel Strahlung durch eine 1 cm dicke Scheibe durchkommt:

$$I = 1 \cdot 10^{-5{,}23\mathrm{cm}^{-1} \cdot 1\,\mathrm{cm}} = 5{,}9 \cdot 10^{-6}$$

Es kommen also 0,00059 % der Strahlung durch. Demnach werden 99,99941 % absorbiert.

Aufgabe 3

Die Kreisfrequenz einer Schwingung ergibt sich zu:

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Umgestellt nach der Frequenz:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung $\nu = c\,\tilde{\nu}$ ergibt sich für die Wellenzahl:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{2\pi c}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Die reduzierte Masse μ beträgt für $H^{35}Cl$:

$$\mu(H^{35}Cl) = \frac{M(H)\cdot M(^{35}Cl)}{M(H)+M(^{35}Cl)}\cdot\frac{1}{N_A} = 1{,}615\cdot 10^{-24}\,\text{g} = 1{,}615\cdot 10^{-27}\,\text{kg}$$

Dieser Wert kann mit den anderen gegebenen Werten in die Gleichung für die Wellenzahl eingesetzt werden:

$$\tilde{\nu}(H^{35}Cl) = \frac{1}{2\pi c}\sqrt{\frac{516\,\text{Nm}^{-1}}{1{,}615\cdot 10^{-27}\,\text{kg}}} = 299874\,\text{m}^{-1} = 2999\,\text{cm}^{-1}$$

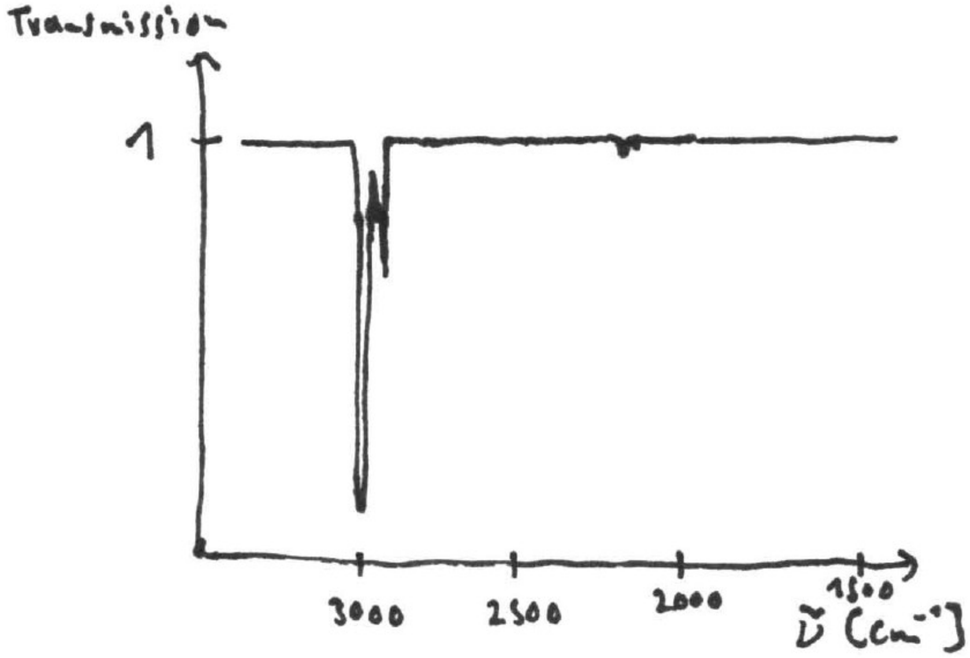
Entsprechend ergeben sich für die anderen Isotope:

$$\tilde{\nu}(H^{37}Cl) = 2996\,\text{cm}^{-1}$$

$$\tilde{\nu}(D^{35}Cl) = 2150\,\text{cm}^{-1}$$

$$\tilde{\nu}(D^{37}Cl) = 2147\,\text{cm}^{-1}$$

Das erwartete Infrarotspektrum sieht folgendermaßen aus:



Aufgabe 4

a) Das Dipolmoment μ beschreibt eine räumliche Ladungstrennung und ist folgendermaßen definiert:

$$\mu = q \cdot r \quad \rightarrow \quad q = \frac{\mu}{r}$$

1 Debye entspricht $3{,}33564 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{Cm}$. Für die Teilladungen an beiden Atomen ergeben sich somit:

$$q = \frac{0{,}117}{1{,}1282 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}} \cdot 3{,}33564 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{Cm} = 3{,}459 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{C} = 0{,}022\,e$$

b) Die elektrische Kraft zwischen zwei Ladungen wird durch das Coulombsche Kraftgesetz beschrieben:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2}$$

Hier wird angenommen, dass die Ladungen gleich groß sind.

Durch Einsetzen der Größen ergibt sich eine Kraft von:

$$F = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}}} \cdot \frac{(3{,}459 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{C})^2}{(1{,}1282 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m})^2} = 8{,}45 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{N}$$

c) Aus der Aufgabe 3 ist die Formel zur Berechnung der Wellenzahl bekannt:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{2\pi c}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Diese Formel wird nun nach der Kraftkonstante umgestellt:

$$k = \mu \cdot (2\pi c \tilde{\nu})^2$$

Die reduzierte Masse von CO beträgt:

$$\mu = \frac{M(C) \cdot M(O)}{M(C) + M(O)} \cdot \frac{1}{N_A} = 1{,}14 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{g} = 1{,}14 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$$

Die Kraftkonstante beträgt somit:

$$k = 1871\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

d) Die rücktreibende Kraft wird durch das Hooksche Gesetz beschrieben:

$$F = k \cdot x$$

Die Größe x ist hier die Auslenkung.

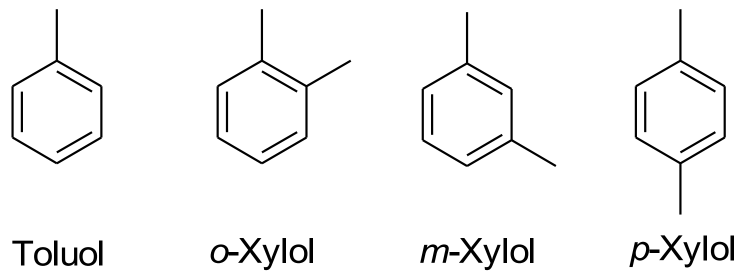
Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle angegeben.

$10^{10}\, r/\mathrm{m}$	1,13	1,08	1
$10^{10}\, x/\mathrm{m}$	0,0018	0,0482	0,1282
F/N	$3{,}37 \cdot 10^{-10}$	$9{,}02 \cdot 10^{-9}$	$2{,}40 \cdot 10^{-8}$

Alle hier berechneten Kräfte sind deutlich größer als die elektrische Kraft, sodass diese keinen Einfluss auf die Schwingung hat.

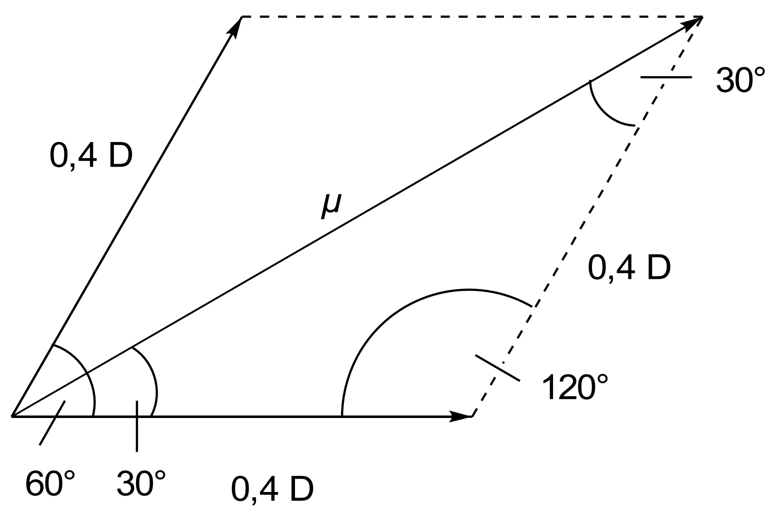
Aufgabe 5

Mithilfe des Dipolmoments von Toluol sollen die Dipolmomente von *ortho*-, *meta*- und *para*-Xylol (Dimethylbenzol) abgeschätzt werden.



Da es sich bei einem Dipolmoment um einen Vektor handelt, kann das resultierende Dipolmoment mithilfe der Vektoraddition abgeschätzt werden.

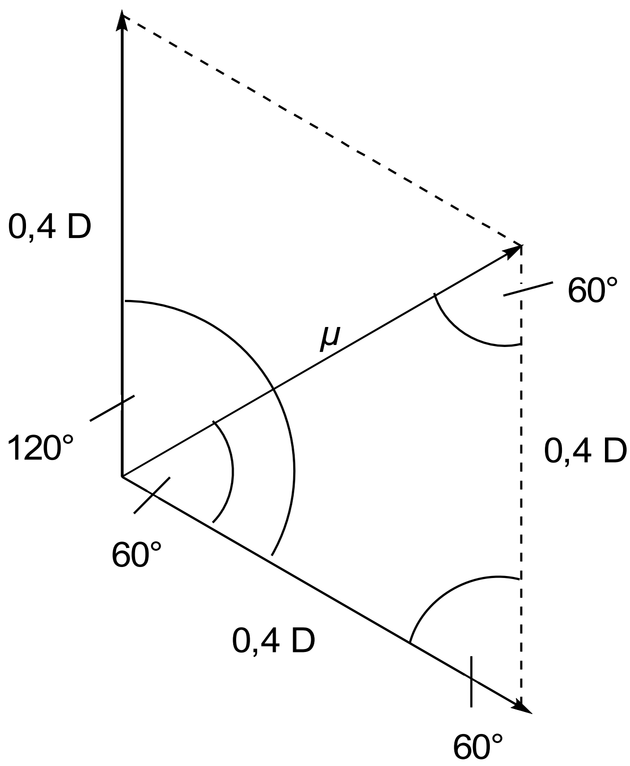
<u>*o*-Xylol:</u>



Mithilfe des Sinussatzes kann das Dipolmoment μ berechnet werden:

$$\frac{\mu}{\sin(120°)} = \frac{0{,}4\,\mathrm{D}}{\sin(30°)} \quad \rightarrow \quad \mu = 0{,}4\,\mathrm{D} \cdot \frac{\sin(120°)}{\sin(30°)} = 0{,}693\,\mathrm{D}$$

<u>*m*-Xylol</u>



Bei dieser Betrachtung entsteht ein Dreieck, dessen Innenwinkel jeweils 60° betragen. Damit ist es ein gleichseitiges Dreieck. Da eine Seite bekanntermaßen 0,4 D beträgt, muss das resultierende Dipolmoment μ auch einen Wert von 0,4 D besitzen.

<u>*p*-Xylol</u>

In diesem Fall zeigen beide Dipolmomente exakt in die entgegengesetzte Richtung. Die Vektoraddition liefert einen Wert von 0. Somit hat das *p*-Xylol kein Dipolmoment.