PC III Übungsblatt 4

Ausgabe 1:

(a) Zunächst normieren wir, davon ausgehend, dass die Basisvektoren orthogonal sind. Daraus folgt schon $\langle i|i\rangle = 1$ und $\langle i|j\rangle = 0$

$$N^2 \langle Q|Q\rangle = 1 = N^2 (0{,}2\langle 1| + 0{,}5\langle 2| + 0{,}3\langle 3| + 0{,}4\langle 4|) \cdot$$

$$\cdot (0{,}2|1\rangle + 0{,}5|2\rangle + 0{,}3|3\rangle + 0{,}4\langle 4|) =$$

$$= N^2 (0{,}04 + 0{,}25 + 0{,}09 + 0{,}16) = N^2 \cdot 0{,}54 \Rightarrow N = \sqrt{\frac{1}{0{,}54}}$$

Zur bestimmung der Wahrscheinlichkeitsamplituden nutzen wir die nun normierten Varianten der Vektoren:

$$a_1 = \langle 1|Q\rangle = \sqrt{\frac{4}{54}} \; ; \; a_2 = \langle 2|Q\rangle = \sqrt{\frac{25}{54}}$$

$$a_3 = \langle 3|Q\rangle = \sqrt{\frac{9}{54}} \; ; \; a_4 = \langle 4|Q\rangle = \sqrt{\frac{16}{54}}$$

Die Wahrscheinlichkeiten, dass das Teilchen über Weg 1, bzw. 2 reagiert sind:

$$|a_1|^2 = \frac{4}{54} = 7{,}4\% \; ; \; |a_2|^2 = \frac{25}{54} = 46{,}3\%$$

(b) Nun sind die Wege 3 und 4 versperrt und wir müssen erneut normieren:

$$N^2 \langle Q|Q\rangle = 1 = N^2 (0{,}2\langle 1| + 0{,}5\langle 2|)(0{,}2|1\rangle + 0{,}5|2\rangle) =$$

$$= N^2 (0{,}04 + 0{,}25) = N^2 \cdot 0{,}29 \Rightarrow N = \sqrt{\frac{1}{0{,}29}}$$

$$|a_2|^2 = \frac{25}{29} = 86\%$$

Aufgabe 2:

Für den Normierungsfaktor N gilt allgemein:

$$N = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\tau \right)^{-\frac{1}{2}}$$

in Kugelkoordinaten gilt: $d\tau = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$

$$N = \left(\int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} |\psi|^2 r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$N = \left[\int_0^{\infty} r^2 \left(e^{-\frac{2r}{a_0}}\right)^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right]^{-\frac{1}{2}} \ominus$$

$$\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = -\cos\theta \Big|_0^{\pi} = -(-1)+1 = 2$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

$$\ominus \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left[\int_0^{\infty} r^2 e^{-\frac{4r}{a_0}} dr \right]^{-\frac{1}{2}} \ominus$$

$$\frac{d^2}{d\left(\frac{4}{a_0}\right)^2} e^{-\frac{4r}{a_0}} = (-r)^2 e^{-\frac{4r}{a_0}} = r^2 e^{-\frac{4r}{a_0}}$$

$$\ominus \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left[\frac{d^2}{d\left(\frac{4}{a_0}\right)^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{4r}{a_0}} dr \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left[\frac{d^2}{d\left(\frac{4}{a_0}\right)^2} \frac{a_0}{4} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{4r}{a_0}} d\left(-\frac{4r}{a_0}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left[\frac{d^2}{d\left(\frac{4}{a_0}\right)^2} \left(\frac{4}{a_0}\right)^{-1} \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left[2 \left(\frac{4}{a_0}\right)^{-3} \right]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8}{\pi a_0^3}}$$

Aufgabe 3:

(a)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin(nx) = -\frac{\hbar^2}{2m}n^2(-\sin nx) = \frac{\hbar^2}{2m}n^2\sin(nx) \Rightarrow \text{ja}$$

EW: $\frac{\hbar^2}{2m}n^2$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(n^2x^2 + x^4 n^4) = -\frac{\hbar^2}{2m}(2n^2 + 12x^2 n^4) \Rightarrow \text{nein}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{-inx} = -\frac{\hbar^2}{2m}(-1)n^2 e^{-inx} \Rightarrow \text{ja}$$

EW: $\frac{\hbar^2}{2m}n^2$

(b)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sin nkx \cdot \sin mky) =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-(nk)^2\sin nkx \sin mky + (mk)^2 \sin nkx \sin mky\right) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\left((nk)^2 + (mk)^2\right)\sin nkx \sin mky \Rightarrow \text{ja}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sin nkx + \sin mky) =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-(nk)^2\sin nkx - (mk)^2\sin mky\right) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}(nk)^2\left(\sin nkx + \left(\frac{m}{n}\right)^2\sin mky\right) \Rightarrow \text{nein}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(e^{(-inkx)\,*\,(-imky)}\right)=$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(e^{-nmk^2xy}\right)=-\frac{\hbar^2}{2m}\left((nmk^2y)^2+(nmk^2x)^2\right)*$$

$$*\,e^{-nmk^2xy}=-\frac{\hbar^2}{2m}(nmk^2)^2(y^2+x^2)e^{-nmk^2xy}\Rightarrow \text{nein}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(e^{-inkx-imky}\right)=$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(e^{-imky}\cdot(-1)(nk)^2e^{-inkx}+e^{-inkx}(-1)(mk)^2e^{-imky}\right)=$$

$$=\frac{\hbar^2}{2m}\left((nk)^2+(mk)^2\right)e^{-inkx-imky}\Rightarrow \text{ja}$$