Übungsblatt 05

Aufgabe 1:

Die zeitabhängige Schrödingergleichung lautet

$$\hat{H}(r)\Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi$$

Wie setzen also ein und sehen, ob Gleichung gilt:

$$\hat{H}(r)\Psi = C_1 \hat{H}(r) \exp\left(-i\frac{E_1}{\hbar}t\right)\varphi_1(r) +$$

$$+ C_2 \hat{H}(r) \exp\left(-i\frac{E_2}{\hbar}t\right)\varphi_2(r) =$$

$$= C_1 E_1 \exp\left(-i\frac{E_1}{\hbar}t\right)\varphi_1(r) + C_2 E_2 \exp\left(-i\frac{E_2}{\hbar}t\right)\varphi_2(r) \neq$$

// zeitunabhängige Schrödingergleichung $\hat{H}(r)\Psi = E\Psi$ //

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(C_1 \exp\left(-i\frac{E_1}{\hbar}t\right)\varphi_1(r) + C_2 \exp\left(-i\frac{E_2}{\hbar}t\right)\varphi_2(r)\right) =$$

$$= -i^2 C_1 \hbar \frac{E_1}{\hbar} \exp\left(-i\frac{E_1}{\hbar}t\right)\varphi_1(r) - i^2 C_2 \hbar \frac{E_2}{\hbar} \exp\left(-i\frac{E_2}{\hbar}t\right)\varphi_2(r) =$$

$$= C_1 E_1 \exp\left(-i\frac{E_1}{\hbar}t\right)\varphi_1(r) + C_2 E_2 \exp\left(-i\frac{E_2}{\hbar}t\right)\varphi_2(r)$$

Aufgabe 2:

Sichtbahr Licht: $\lambda = 740 - 380\ nm$

$\Delta E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$

$\lambda_1 = 740\ nm \Leftrightarrow \Delta E_1 = 2{,}68 \cdot 10^{-19}\ J$

$\lambda_2 = 380\ nm \Leftrightarrow \Delta E_2 = 5{,}23 \cdot 10^{-19}\ J$

Der Abstand zwischen zwei Zustände des Elektrons im Potentialkasten:

$$\Delta E = \frac{h^2}{8m_e a^2}(2n+1), \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

is minimal für $n = 1 \Leftrightarrow$ Übergang $2 \longrightarrow 1$

$$\Delta E = \frac{h^2}{8m_e a^2} \cdot 3$$

$$a^2 = \frac{3}{8} \frac{h^2}{\Delta E m_e} \Rightarrow a = \frac{h}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{1}{\Delta E m_e}}$$

$$a_1 = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{1}{2{,}68 \cdot 10^{-19}\ J \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ kg}} = 0{,}82\ nm$$

$$a_2 = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{1}{5{,}23 \cdot 10^{-19}\ J \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ kg}} = 0{,}59\ nm$$

$$a = 0{,}82 - 0{,}59\ nm$$

Ausgabe 3:

$V = 2eV = 3,204 \cdot 10^{-19}\, J$ $\qquad m_H = 1,674 \cdot 10^{-27}\, kg$

$E = 1eV = 1,602 \cdot 10^{-19}\, J$ $\qquad m_D = 3,348 \cdot 10^{-27}\, kg$

$a = 0,1\, nm$ $\qquad m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}\, kg$

Ist die Näherung gültig:

$$ka = \sqrt{\frac{2ma^2(V-E)}{\hbar^2}}$$

$$H:\ k_H a = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,674 \cdot 10^{-27} kg \cdot 10^{-20} m^2 \cdot (3,204 - 1,602) \cdot 10^{-19} J}{(1.0546 \cdot 10^{-34})^2 J^2 s^2}} = 21,9602 \gg 1$$

Ja

$$D:\ k_D a = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,348 \cdot 10^{-27} kg \cdot 10^{-20} m^2 (3,204 - 1,602) \cdot 10^{-19} J}{(1.0546 \cdot 10^{-34})^2 J^2 s^2}} = 31,0564 \gg 1$$

Ja

$$e:\ k_e a = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} kg \cdot 10^{-20} m^2 (3,204 - 1,602) \cdot 10^{-19} J}{(1.0546 \cdot 10^{-34})^2 J^2 s^2}} = 0,5123 < 1$$

Nein

$$H:\quad T = 16 \frac{E}{V}\left(1 - \frac{E}{V}\right) e^{-2k_H a} = 16 \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) e^{-2 \cdot 21,9602} = 3,37 \cdot 10^{-19}$$

$$D:\quad T = 16 \frac{E}{V}\left(1 - \frac{E}{V}\right) e^{-2k_D a} = 4 \cdot e^{-2 \cdot 31,0564} = 4,24 \cdot 10^{-27}$$

$$e:\quad T = \left[1 + \frac{V^2}{4E(V-E)} \sinh^2(k_e a)\right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + \frac{4}{4 \cdot 1 (2-1)} \sinh^2(0,5123)\right]^{-1} = 0,78$$

Aufgabe 4:

$$V_{CIS} = 0{,}22\,eV = 3{,}52 \cdot 10^{-20}\,J$$

$$V_{TRANS} = 0{,}029\,eV = 4{,}66 \cdot 10^{-21}\,J$$

Tunnelwahrscheinlichkeit für $ka \gg 1$:

$$T = 16\,\frac{E}{V}\left(1 - \frac{E}{V}\right)e^{-2ka} \qquad \text{mit} \quad k = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}$$

Potentialbarrierebreite a:

$$a = \frac{\pi}{2}d = \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot 10^{-10}\,m = 1{,}571 \cdot 10^{-10}\,m = 1{,}57\,\text{Å}$$

Viertelkreis

$$E = 0{,}02\,eV = 3{,}204 \cdot 10^{-21}\,J \quad ; \quad m(H) = 1{,}661 \cdot 10^{-27}\,kg$$

$$T_{CIS} = 16\,\frac{0{,}02\,eV}{0{,}22\,eV}\left(1 - \frac{0{,}02\,eV}{0{,}22\,eV}\right)exp\left(-2 \cdot 1{,}571 \cdot 10^{-10}\,m \cdot k_{CIS}\right)$$

$$k_{CIS} = \sqrt{\frac{2m\,(V_{CIS} - E)}{\hbar^2}} = 9{,}78 \cdot 10^{10}\,\frac{1}{m}$$

$$T_{CIS} = 6{,}04 \cdot 10^{-14} \approx 6 \cdot 10^{-12}\,\%$$

$$k_{TRANS} = \sqrt{\frac{2m\,(V_{TRANS} - E)}{\hbar^2}} = 2{,}085 \cdot 10^{10}\,\frac{1}{m}$$

$$T_{TRANS} = 16\,\frac{0{,}02\,eV}{0{,}029\,eV}\left(1 - \frac{0{,}02\,eV}{0{,}029\,eV}\right)exp\left(-2 \cdot 1{,}571 \cdot 10^{-10}\,m \cdot k_{TRANS}\right) =$$

$$= 0{,}0049 = 0{,}49\,\%$$