Übungsblatt 09

Aufgabe 1

a)

$$E_n = -\frac{\mu}{2} Z^2 \left(\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 \hbar}\right)^2 \frac{1}{n^2}$$

$$\Delta E_{1,2} = \frac{\mu}{2} Z^2 \left(\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 \hbar}\right)^2 \frac{3}{4}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$m_{ee} = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\,kg$$

$$m_{Kern}\left({}^1_1H\right) = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}\,kg \Rightarrow \mu_H = 9{,}1044 \cdot 10^{-31}\,kg$$

$$m_{Kern}\left({}^9_4Be\right) = 1{,}5065 \cdot 10^{-26}\,kg \Rightarrow \mu_{Be^{3+}} = 9{,}1088 \cdot 10^{-31}\,kg$$

$$\Delta E_{1,2}\,(H) = 1{,}634 \cdot 10^{-18}\,J$$

$$\Delta E_{1,2}\,(Be^{3+}) = 2{,}6156 \cdot 10^{-17}\,J$$

(b)

Wasserstoffatom

$$E_n = -\frac{\mu}{2} Z^2 \left(\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 \hbar}\right)^2 \frac{1}{n^2}$$

$$\Delta E_{1,2} = \frac{\mu}{2} Z^2 \left(\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 \hbar}\right)^2 \frac{2n+1}{n^2(n^2+2n+1)}$$

Mit steigendem n wächst der Nenner schneller, als der Zähler. Der Abstand ΔE wird mit wachsendem n entsprechend kleiner.

Teilchen im Kasten

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

$$\Delta E = \frac{h^2}{8mL^2}(2n+1)$$

Mit steigendem n nimmt der Abstand ΔE offenbar zu.

Aufgabe 2

Kation mit einem Elektron:

$$E_n = -\frac{\mu}{2} Z^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar} \right)^2 \frac{1}{n^2}$$

$$\Delta E_{1,2} = \frac{\mu}{2} Z^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar} \right)^2 \frac{2n+1}{n^2(n^2+2n+1)}$$

Die Kernladung Z geht quadratisch in E und ΔE ein. Beide Größen wachsen also, wenn Z wächst.

Teilchen im Kasten

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

$$\Delta E = \frac{h^2}{8mL^2}(2n+1)$$

Je größer die Masse m eines Teilchens im 1D-Kasten, desto kleiner sind E und ΔE. Außerhalb atomarer Dimensionen → Kontinuum ohne Energiequantelung.

Ausgabe 3

$$R_{n,l}(r) = \sqrt{\frac{4(n-l-1)!\,Z^3}{(n+l)!\,n^4 a_0^3}} \left(\frac{2Zr}{na_0}\right)^l \left[L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right)\right] e^{-\frac{Zr}{na_0}}$$

$$\rho = \frac{2Zr}{na_0}$$

$$R_{n,l}(r) = \sqrt{\frac{4(n-l-1)!\,Z^3}{(n+l)!\,n^4 a_0^3}}\, \rho^l \left[L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)\right] e^{-\frac{\rho}{2}}$$

(a) Der Faktor $e^{-\rho/2}$ sorgt dafür, dass die Wellenfunktion in großer Entfernung gegen Null geht, da $\rho = \frac{2Zr}{na_0}$ bei $r = \infty$ auch unendlich wird und $e^{-\infty}$ gleich Null ist.

(b) Der Faktor $\rho = \frac{2Zr}{na_0}$ wird bei $r = 0$ zu Null. Somit sorgt ρ^l für das Verschwinden der Wellenfunktion am Kern.

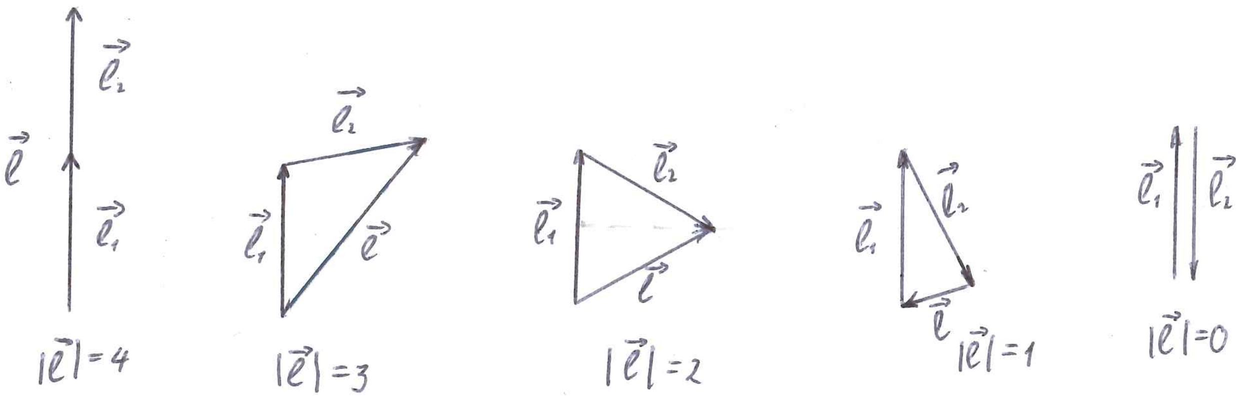
(c) Die assoziierten Laguerre-Polynome sorgen für die Existenz Knoten. Zum Beispiel ist für 2s-Orbitale $L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho) = 2 - \rho$. Das heißt bei $\rho = 2$ ist das Polynom und damit die Wellenfunktion Null und ändert dort ihr Vorzeichen. Die Knotenebenen, die man aus Bildern von 2p-Orbitalen kennt sind keine Knotenebenen im Radialteil der Wellenfunktion. Sie kommen aus dem Winkelteil.

Aufgabe 4

(a) $L = l_1 + l_2,\ l_1 + l_2 - 1, \ldots, |l_1 - l_2|$

$$l_1 = l_2 = 2$$

$$L = 0, 1, 2, 3, 4$$



(b) Analog zu Aufgabe a) können für $l_1 = 2$ und $l_2 = 3$ die kombinierten Bahndrehimpulse $L = 5, 4, 3, 2, 1$ ermittelt werden.

(c) Den Drehimpuls L kann man genauso mit dem Drehimpuls $l_3 = 1$ des p-Elektrons koppeln sodass für den kombinierten Drehimpuls L' der drei Elektronen die Werte $L' = 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$ möglich sind.