

PC III

Aufbau der Materie

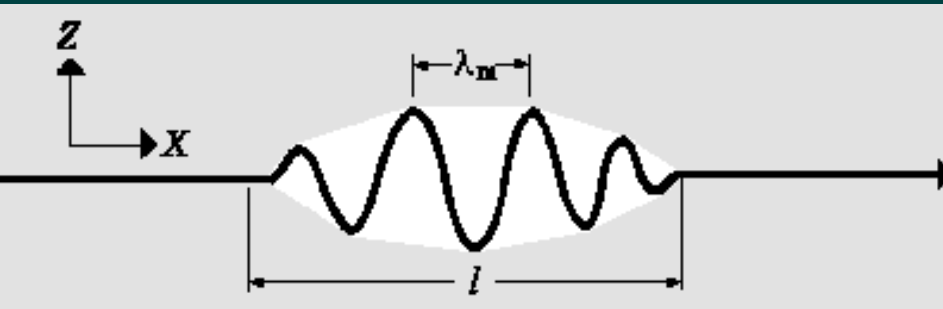
➤ Kapitel 2

Die Grundzüge der Quantenmechanik

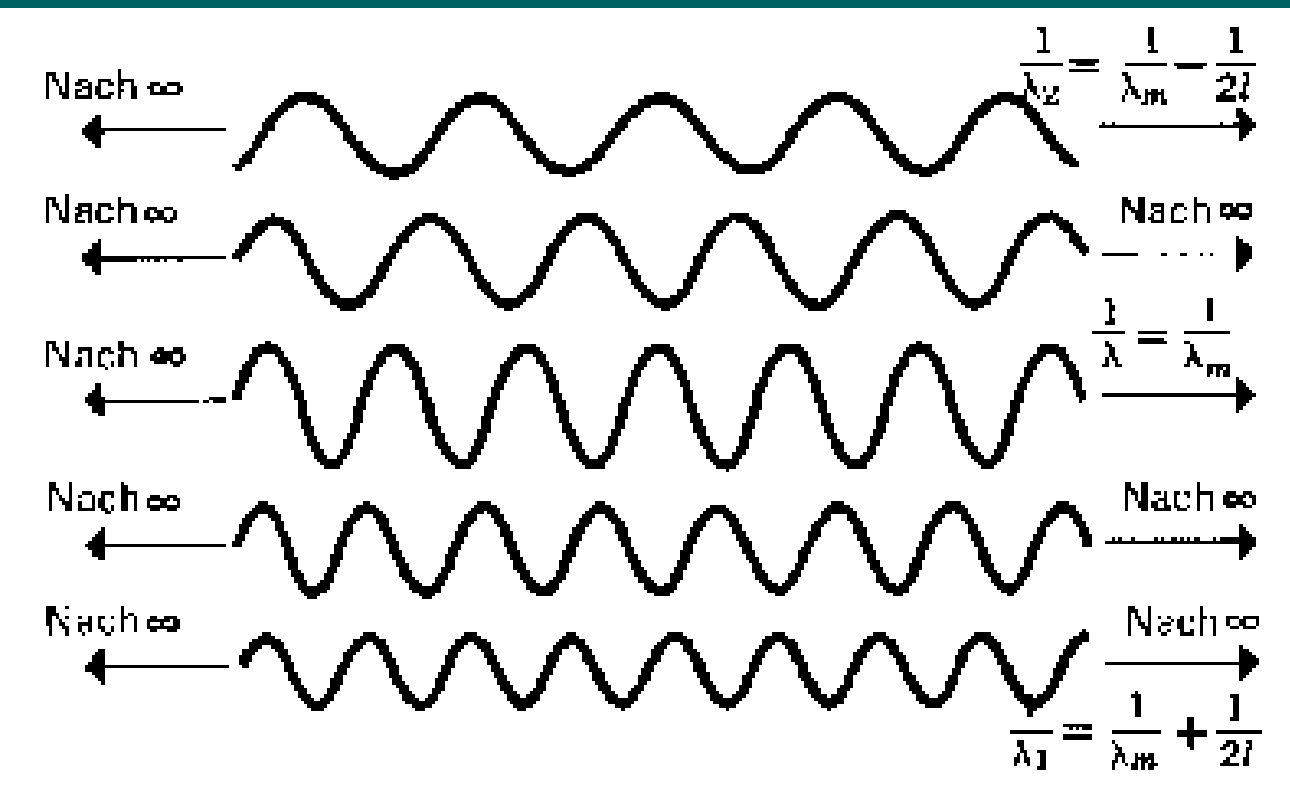
Vorlesung: <http://www.pci.tu-bs.de/aggericke/PC3>

Übung: <http://www.pci.tu-bs.de/aggericke/PC3/Uebungen>

Wellenpakete



Dieses Wellenpaket kann dadurch gebildet werden, dass eine große Zahl von unendlich langen Sinuswellen, ähnlich den unten gezeigten, einander überlagert werden. ($\Delta x = l$)



Einige der Fourierkomponenten des Wellenpakets mit

$$p_m = h/\lambda_m$$

Der Impuls erstreckt sich über:

$$\Delta p_x \approx h/l$$

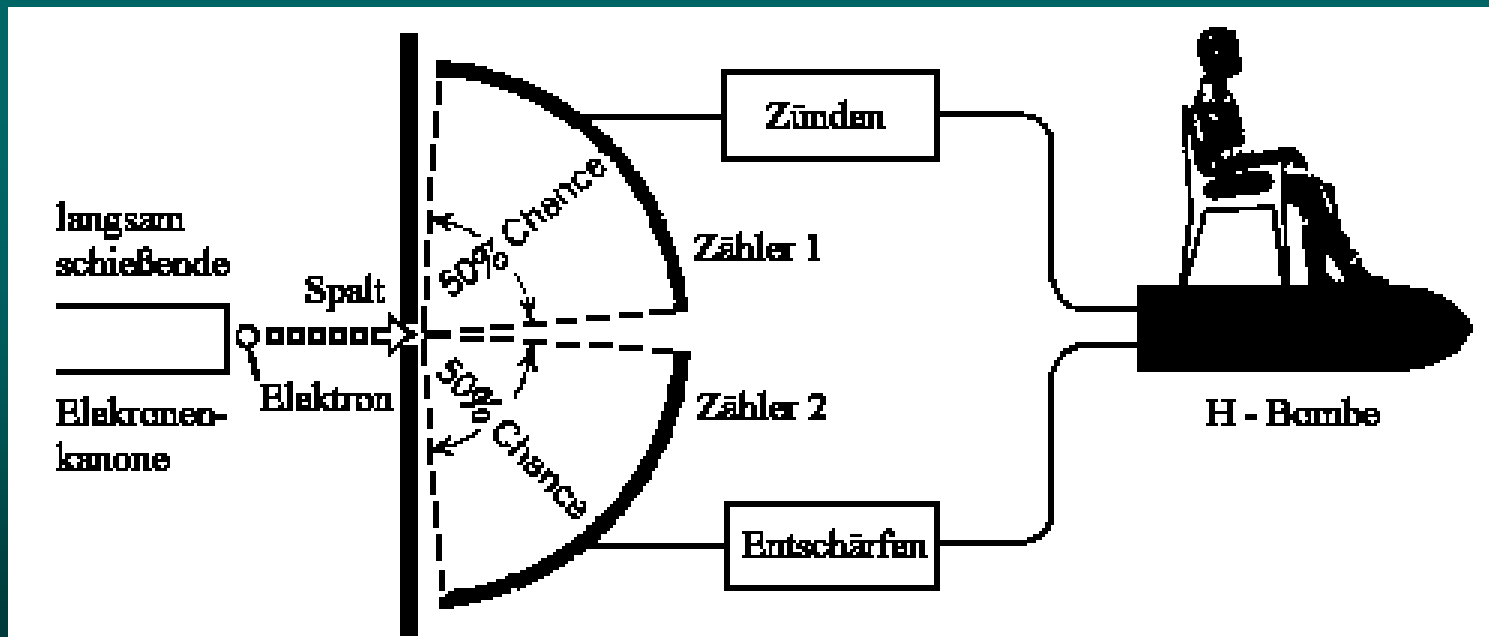
$$\Delta p_x \Delta x \approx h$$

Wellenpakete

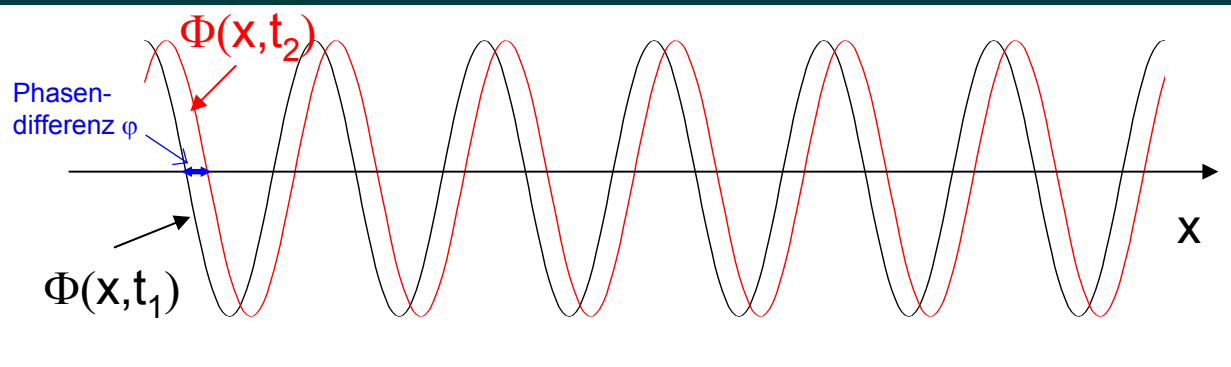


Die Heisenbergsche Unschärferelation

Die Unschärferelation lehrt uns, dass es prinzipiell keine Möglichkeit gibt vorherzusagen, ob ein Elektron (in der unteren Abbildung) die H-Bombe zündet oder entschärft!



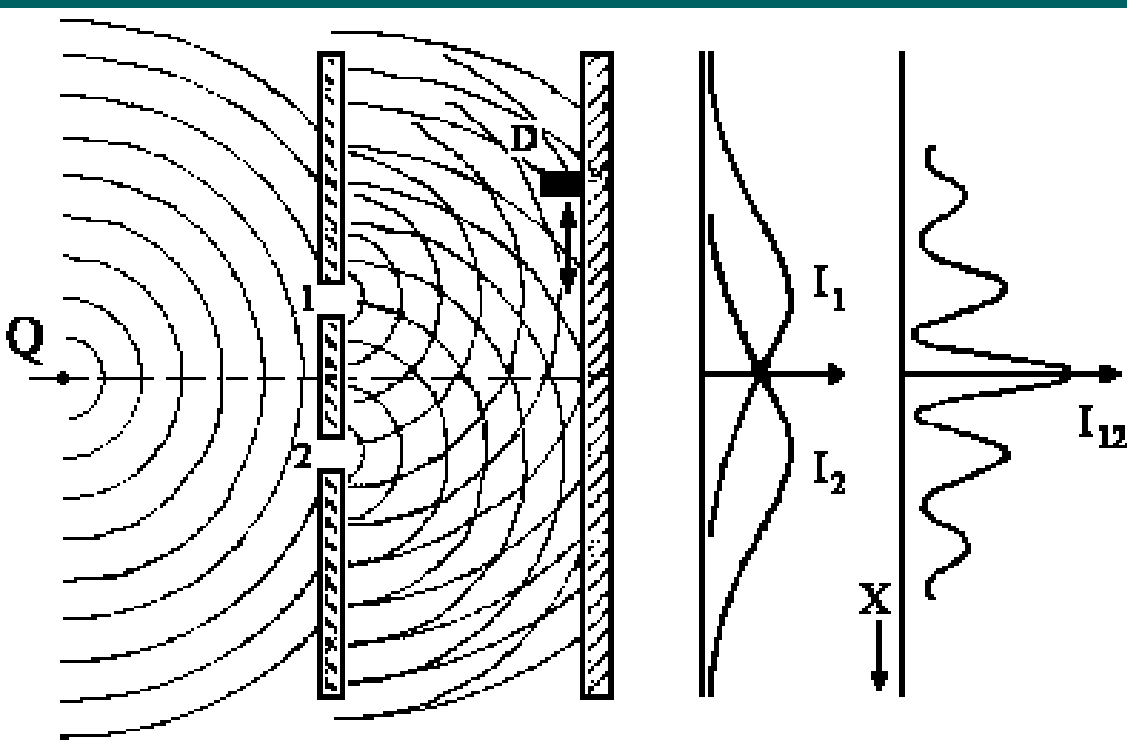
Experimente mit *Wellen*, Kugeln und Elektronen



$$\phi = A e^{-i\omega t + ikx}$$

$\omega = 2\pi\nu$: Frequenz der Welle

$\mathbf{k} = 2\pi/\lambda = p/\hbar$: Wellenvektor



Intensität der Welle: $I = |\phi|^2$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

$$I = |\phi_1 + \phi_2|^2$$

$$I = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{1/2} \cdot \cos \varphi$$

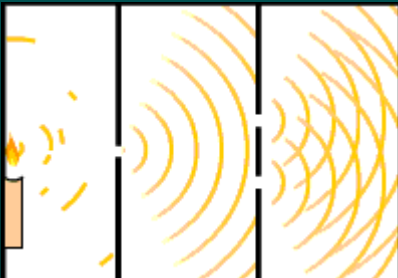
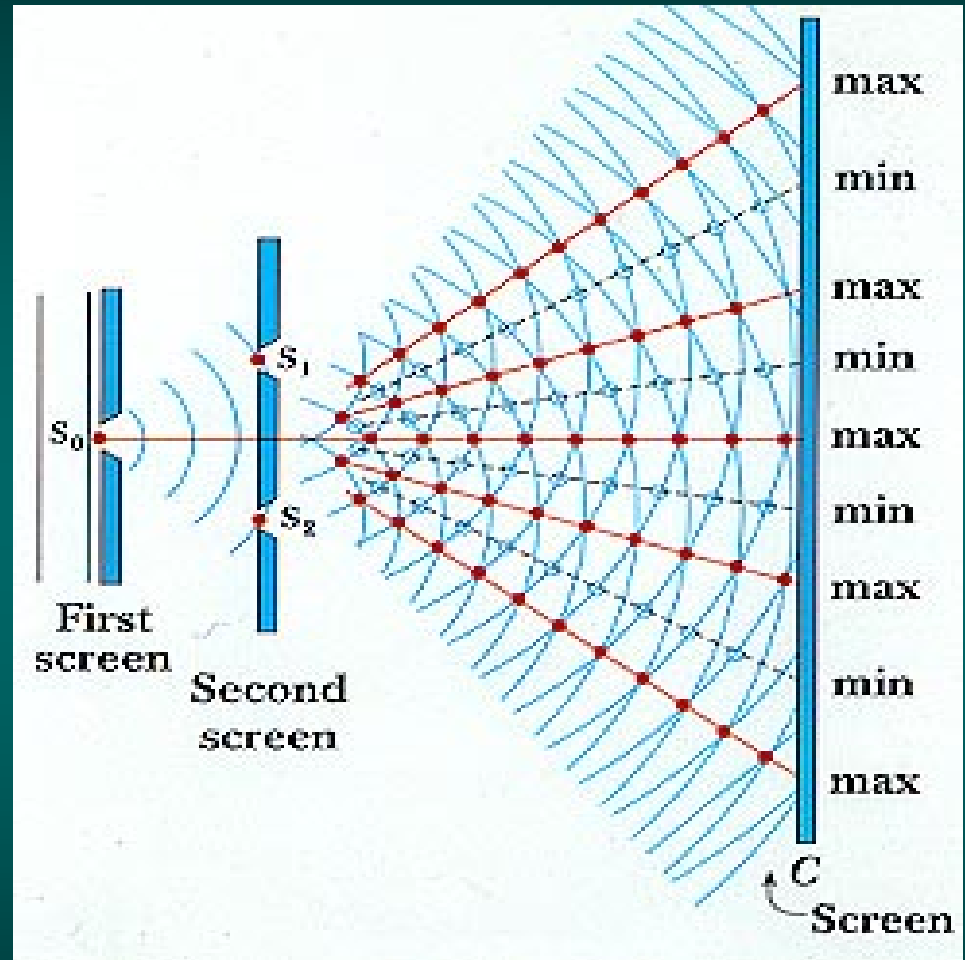
mit der Phasendifferenz φ

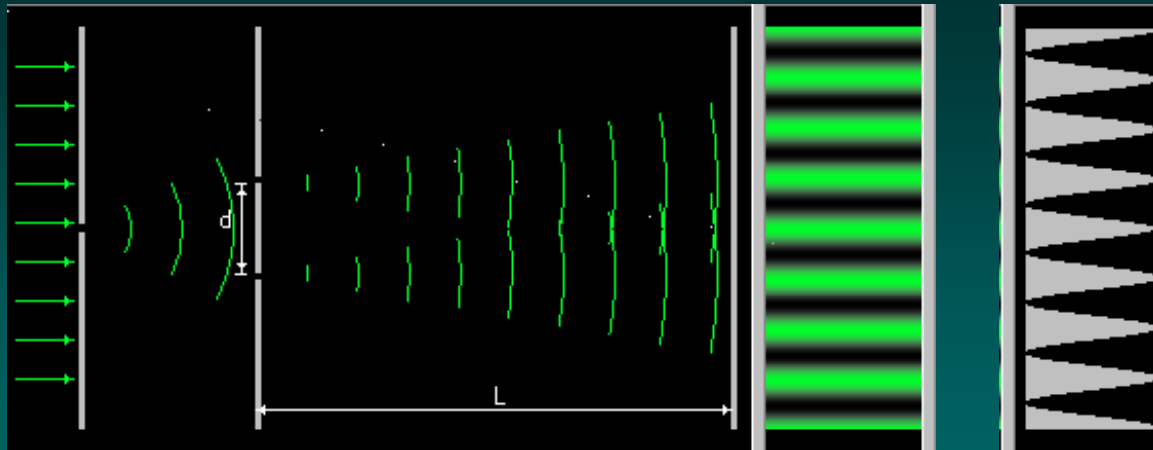
Thomas Young:

Doppelspalt (1799)



* 13. Juni 1773 in Milverton,
Somersetshire
† 10. Mai 1829 in London



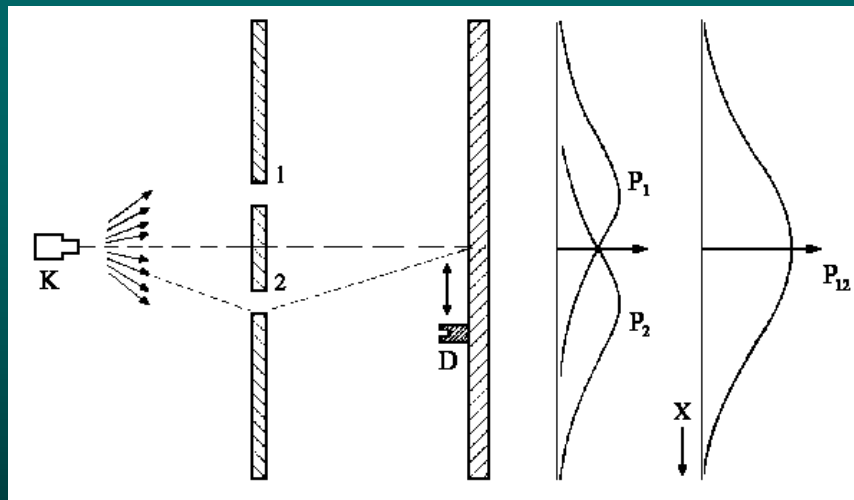


Intensität $\propto E^2$
 Wahrscheinlichkeitsverteilung der Photonen

Fragen:

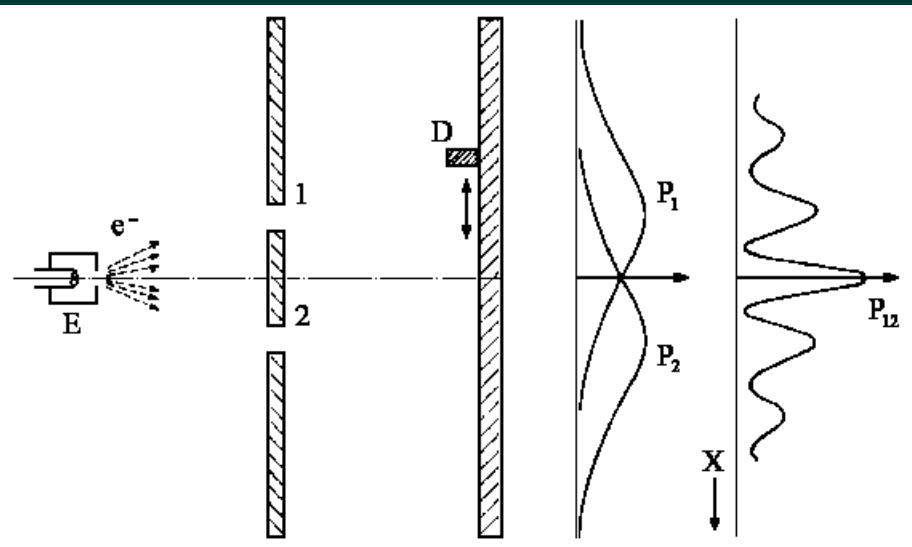
- Wenn nur 1 Teilchen unterwegs ist, was interferiert da?
- Zurückverfolgen der Photonen: durch welchen Spalt?
- Wie kommen die Photonen in den Schatten?
- Impulserhaltung: wo kommt der Transversalimpuls her?

Experimente mit Wellen, *Kugeln* und Elektronen



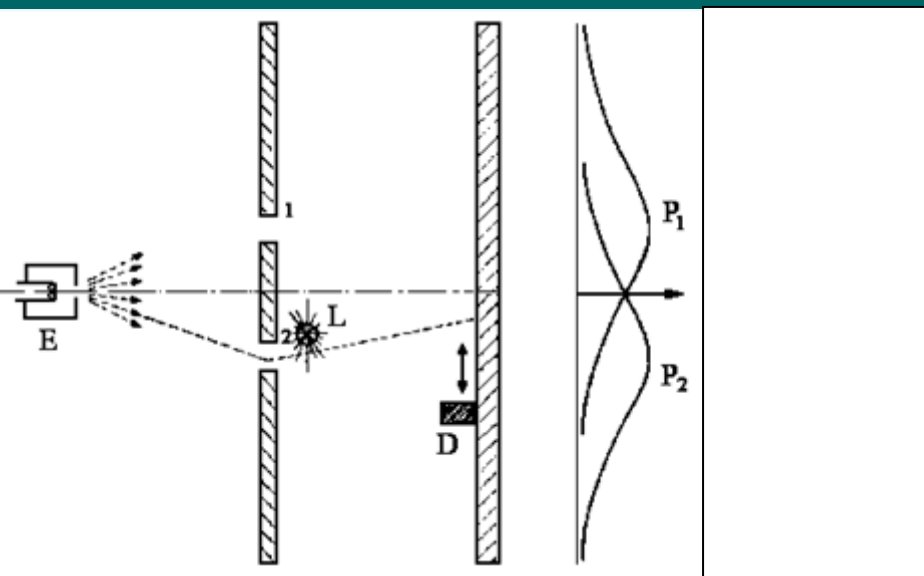
$$P_{12} = P_1 + P_2$$

Experimente mit Wellen, Kugeln und *Elektronen*



$P_{12} \neq P_1 + P_2$, auch wenn immer nur ein Elektron nach dem anderen am Detektor ankommt!

$$P_{12} = |\phi_1 + \phi_2|^2 \neq |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2$$

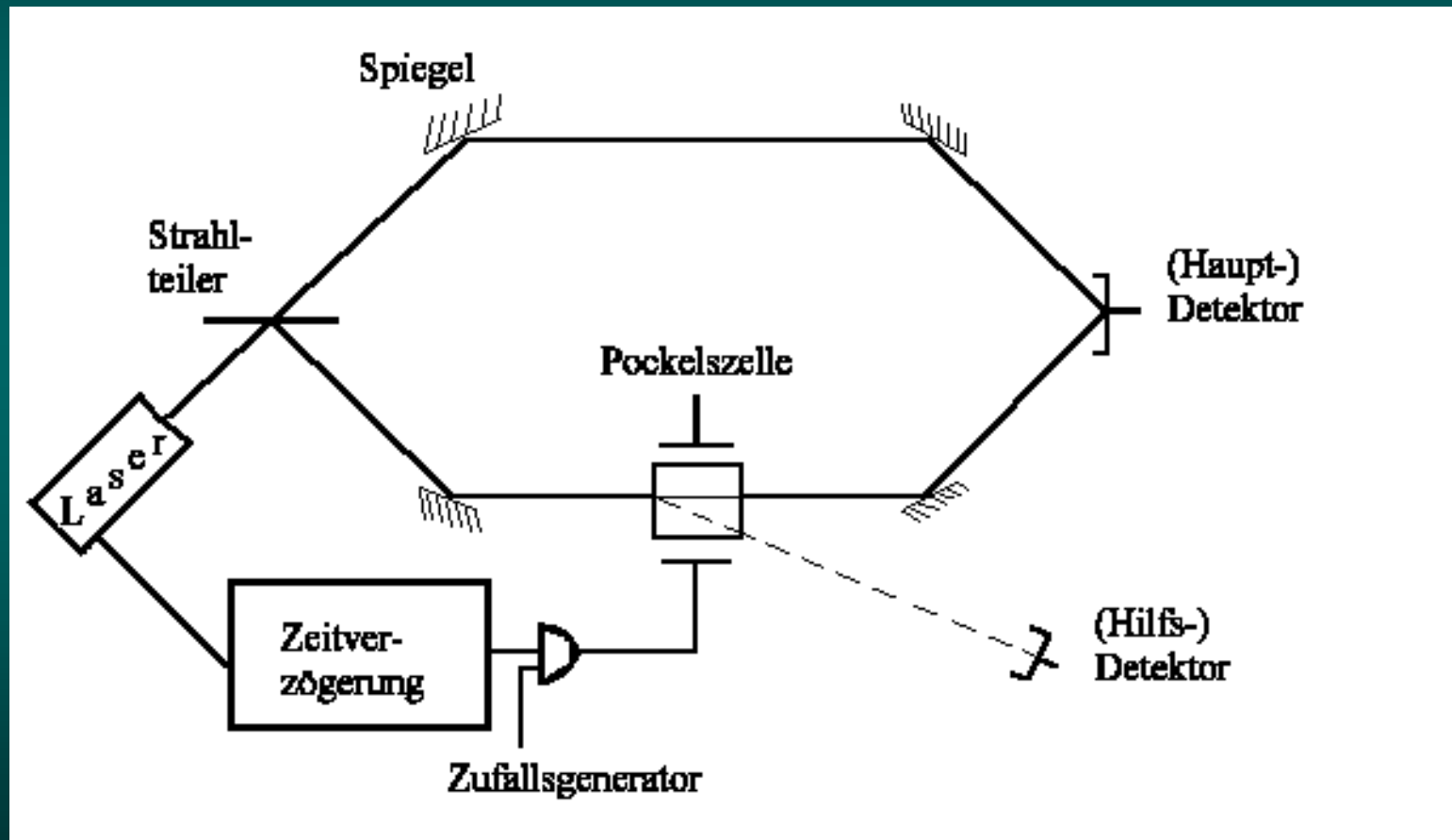


$$P_{12} = P_1 + P_2 \quad \text{oder} \quad P_{12} = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2$$

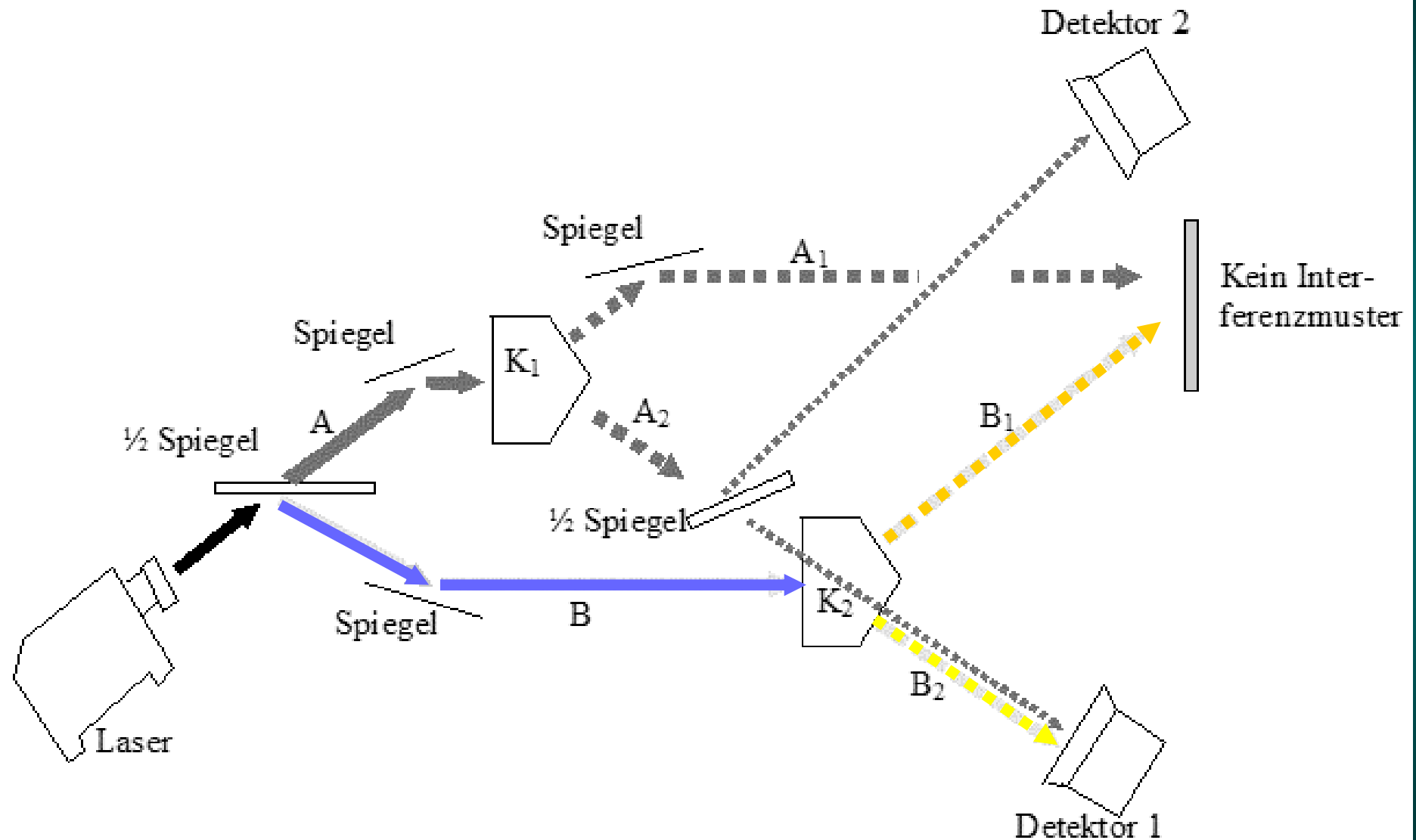
Fazit: Ein Experiment bei dem wir feststellen können, welchen Weg das Elektron geht, lässt das Interferenzbild verschwinden. Wenn wir **keine** Möglichkeit haben das Elektron zu beobachten, d.h. grundsätzlich nicht wissen können welchen Weg das Teilchen nimmt, dann ist die Behauptung das Elektron geht **entweder** den Weg 1 **oder** den Weg 2 unsinnig. Wir dürfen nicht einmal behaupten, dass es durch das eine oder durch das andere Loch hindurchgegangen ist.

Welcher-Weg-Experiment

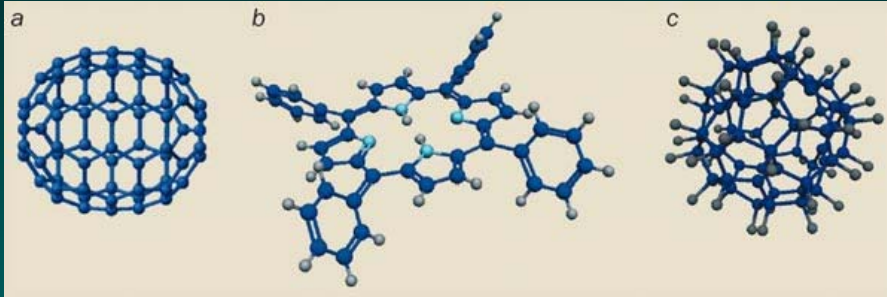
Was geschieht, wenn der Experimentator mit seiner Entscheidung, wie er das Teilchen beobachtet, wartet, bis das Teilchen den Doppelspalt durchdrungen hat und obendrein die beiden Wege weit voneinander entfernt liegen?



Welcher-Weg-Experiment



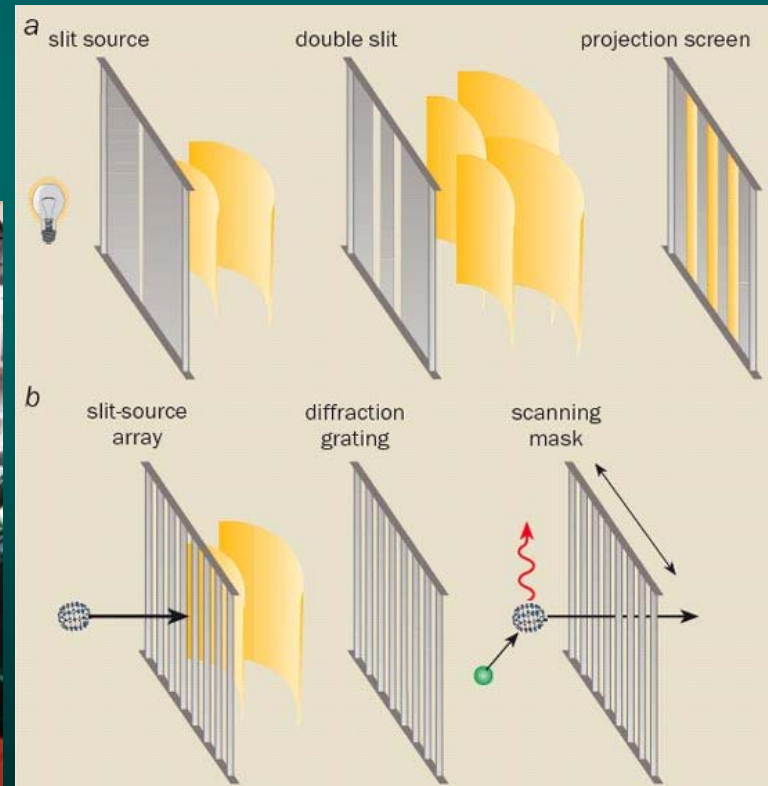
Experiment: Materie ist eine Welle



- (a) Buckyball C-70;
- (b) Biomolekül Tetraphenylporphyrin (TPP) $C_{44}H_{30}N_4$ erstes Biomolekül, das Wellencharakter zeigt;
- (a) das Fulleren $C_{60}F_{48}$ (Masse 1632 au; momentaner Weltrekord (April 2005))



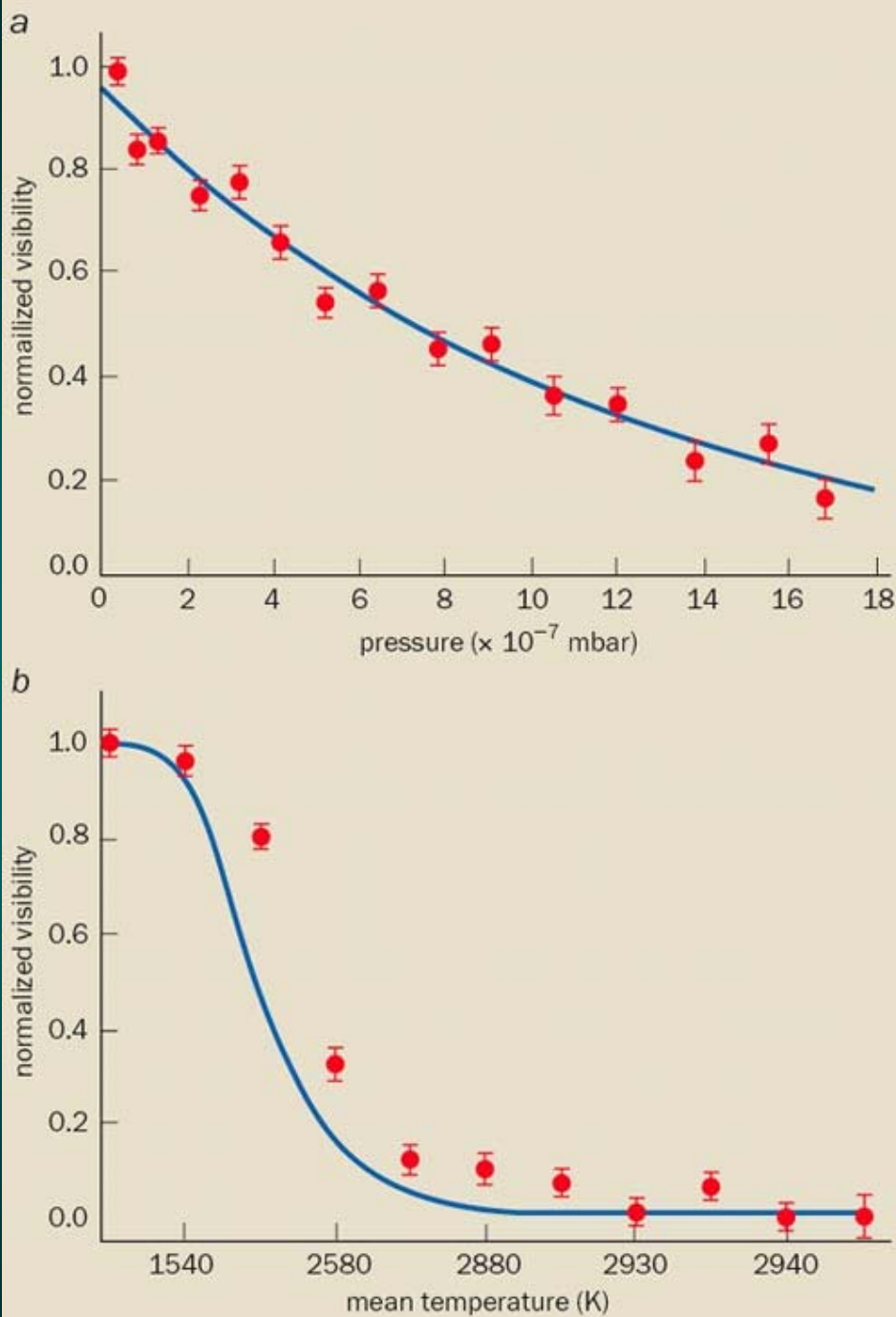
Anton Zeilinger,
Wien



Keine Interferenz, wenn das Molekül mit Gas (grün) kollidiert oder ein Photon emittiert (rot).

Experiment: Materie ist eine Welle

Die Interferenz (hier Visibility) nimmt ab, wenn das Molekül
(a) mit Gas kollidiert oder
(b) ein Photon emittiert (hier durch Erhöhung der Temperatur mit Laserbestrahlung).



Quanteninformation mit kanonischen Variablen

Gaußsche Zustände ...	Arvind et al., quant-ph/9509002 R. Simon, E.C.G. Sudarshan, und N. Mukunda, Phys. Rev. A 36 (1987) A. Holevo und R.F. Werner, Phys. Rev. A 62 (2000) W. Vogel, D.-G. Welsch und S. Wallentowitz, Quantum Optics (Wiley-VCH, Berlin, 2001)
Klonieren	G. Lindblad, J. Phys. A 33 (2000) N.J. Cerf und S. Iblisdir, Phys. Rev. A 62 (2000)
Teleportation	Furusawa et al., Science 282 , (1998) P. van Loock, S.L. Braunstein und H.J. Kimble, Phys. Rev. A 62 (2000)
Kryptographie	F. Grosshans und P. Grangier, Phys. Rev. Lett. 88 (2002) N.J. Cerf, S. Iblisdir und G. van Asche, Eur. Phys. J. D 18 (2002)
Destillation	J. Eisert, S. Scheel und M.B. Plenio, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) J. Fiurasek, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) G. Giedke und J.I. Cirac, Phys. Rev. A 65 (2002) L.-M. Duan et al., Phys. Rev. A 62 (2000)
Kriterien für Verschränktheit	R.F. Werner und M.M. Wolf, Phys. Rev. Lett. 86 (2001) R. Simon, Phys. Rev. Lett. 84 (2000) G. Giedke et al., Quantum Inf. Comput. 1 (2001)
Erzeugung von verschränkten Zuständen	C. Silberhorn et al., Phys. Rev. Lett. 86 (2001) S.L. Braunstein und H.J. Kimble, Phys. Rev. Lett. 80 (1998) M.M. Wolf, J. Eisert und M.B. Plenio, quant-ph/0206171
Lokale Zustandsmanipulation	J. Eisert und M.B. Plenio, Phys. Rev. Lett. 89 (2002)
Verschränktheit in unendlichen Systemen	J. Eisert und M.B. Plenio, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) K. Audenaert, et al., Phys. Rev. A 65 (2002)
Verschränktheorie im Unendlichdimensionalen	S.J. Summers und R.F. Werner, Phys. Lett. A 110 (1985) J. Eisert, C. Simon und M.B. Plenio, J. Phys. A 39 (2002)

Drei Grundprinzipien der Quantenmechanik

1. Die Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses ist in einem idealen Experiment durch das Quadrat des Absolutbetrages einer komplexen Zahl ϕ gegeben, die Wahrscheinlichkeitsamplitude (oder kurz "Amplitude") genannt wird:

$$P = |\phi|^2 = \phi \cdot \phi^*$$

2. Wenn ein Ereignis auf mehrere unterschiedliche Weisen auftreten kann, dann gilt das so genannte Superpositionsprinzip (Linearkombination):

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_1 + \phi_2 \\ P &= |\phi|^2 = |\phi_1 + \phi_2|^2 \quad \leftarrow \text{Interferenz}\end{aligned}$$

3. Wenn ein Experiment durchgeführt wird, das eine Entscheidung erlaubt, welche Alternative wirklich gewählt wurde, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis:

$$P = P_1 + P_2 = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 \quad \leftarrow \text{keine Interferenz}$$

Schrödingers Katze



Durch einen natürlichen Zufallsgenerator, z.B. radioaktiver Zerfall, wird mit 50% Wahrscheinlichkeit ein tödliches Gas freigesetzt. Wenn der Kasten vollständig abgeschlossen von der Umwelt ist, dann müssen wir zur exakten Beschreibung des Systems annehmen:

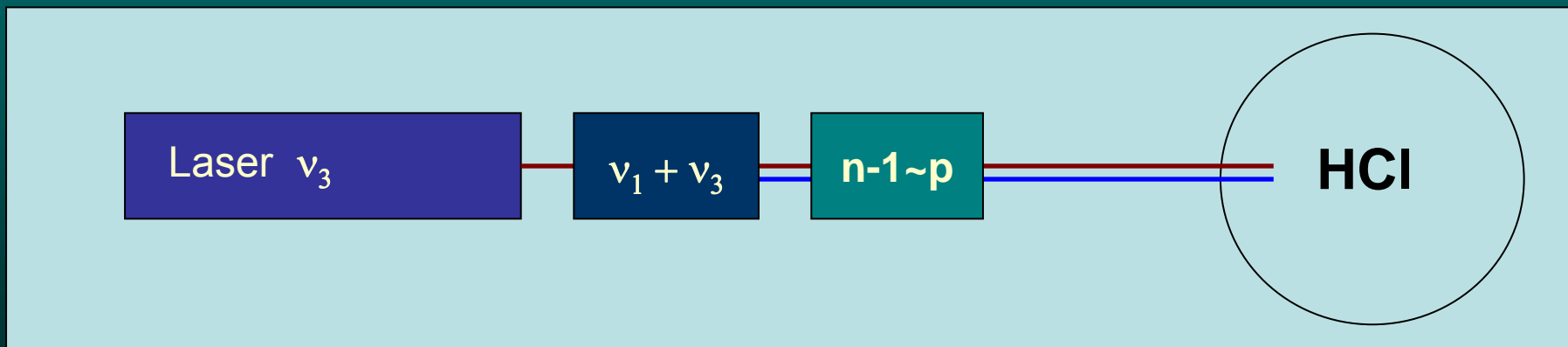
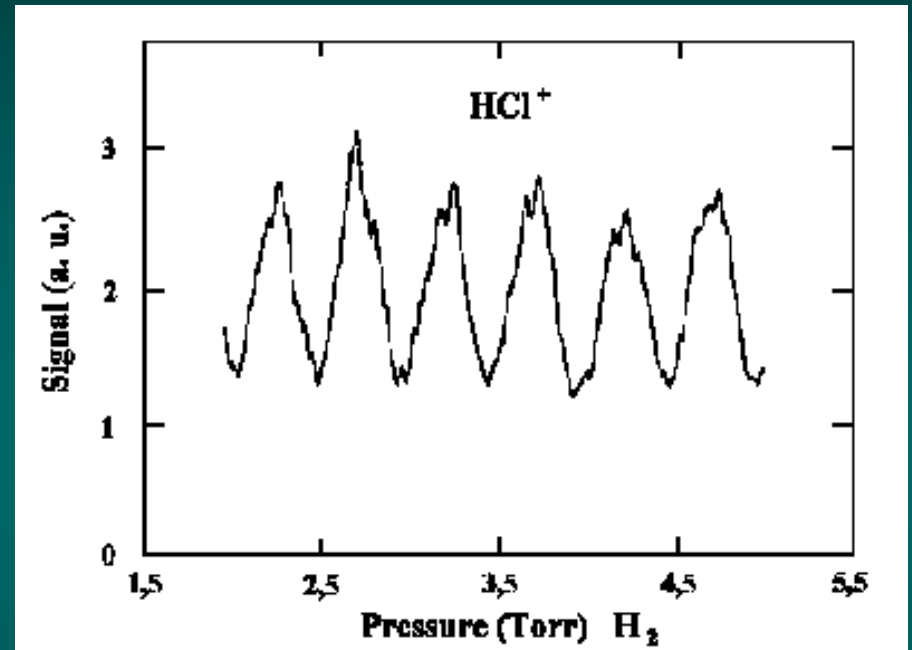
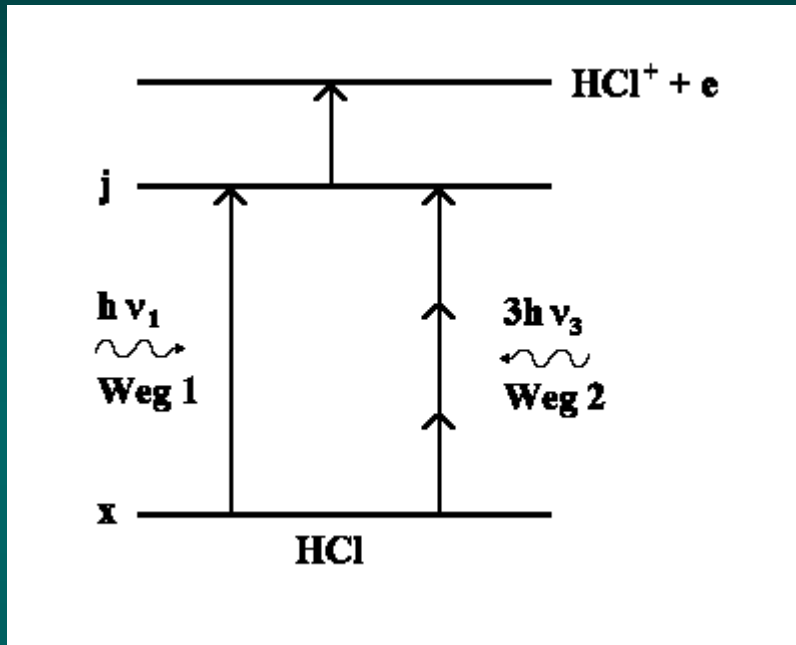
$$|\Psi\rangle = |\text{Katze tot}\rangle + |\text{Katze lebt}\rangle$$



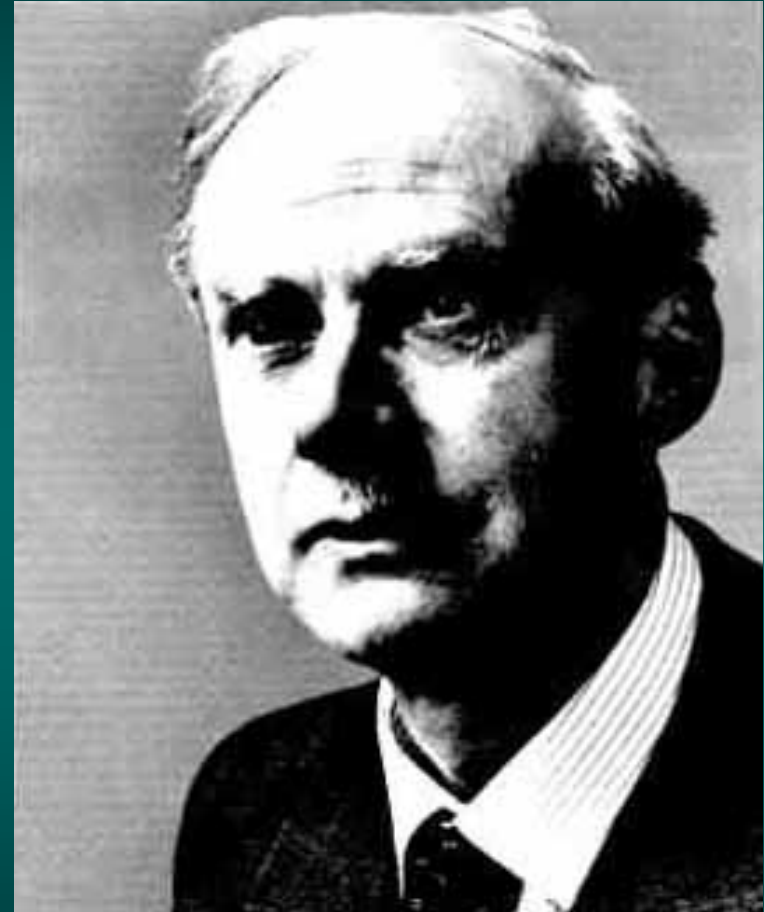
Erst wenn ein Austausch mit der Umgebung stattfindet, erhalten wir:

Katze lebt oder Katze ist tot

Kontrolle einer chemischen Reaktion ohne Energie



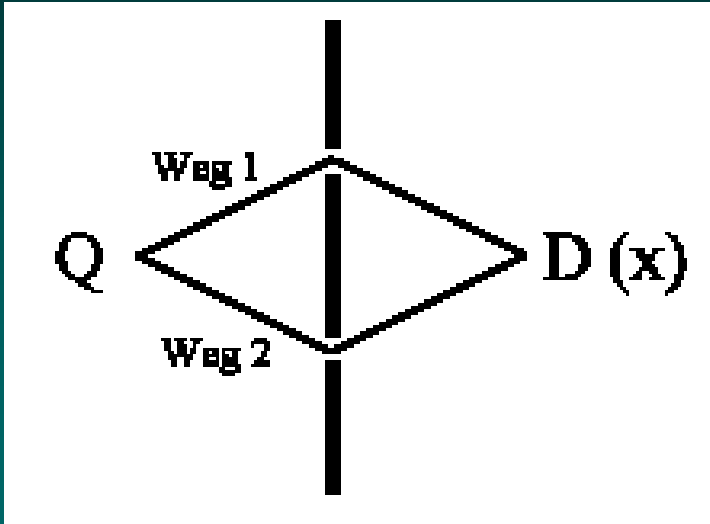
Paul Adrien Maurice Dirac



* 8. Aug. 1902 in Bristol, England
+ 20. Okt. 1984 in Tallahassee, Florida, USA

Nobelpreis 1933

<bra| und |ket> Vektoren



< nach | von >

<Spalt1|Quelle> <x|Spalt1>

Weg 1: <x|1><1|Q>

Weg 2: <x|2><2|Q>

Gesamtwahrscheinlichkeitsamplitude: Weg1+Weg2:

$$\langle x|1\rangle\langle 1|Q\rangle + \langle x|2\rangle\langle 2|Q\rangle$$

Gesamtwahrscheinlichkeitsamplitude, wenn es beliebig viele Spalte gibt:

$$\langle x|Q\rangle = \sum_{i=1} \langle x|i\rangle\langle i|Q\rangle$$

$$\sum_{i=1} |i\rangle\langle i| = 1$$

Die Größe $\langle i|Q\rangle = a_i$ gibt den Anteil der Quelle Q an, die über den i. Spalt zur Wahrscheinlichkeitsamplitude beiträgt.

$$\langle x|Q\rangle = a_1\langle x|1\rangle + a_2\langle x|2\rangle$$

$$\psi(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x)$$

$$|Q\rangle = a_1|1\rangle + a_2|2\rangle$$

Eigenschaften der Vektoren bzw. Amplituden

$$|Q\rangle = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle + \dots$$

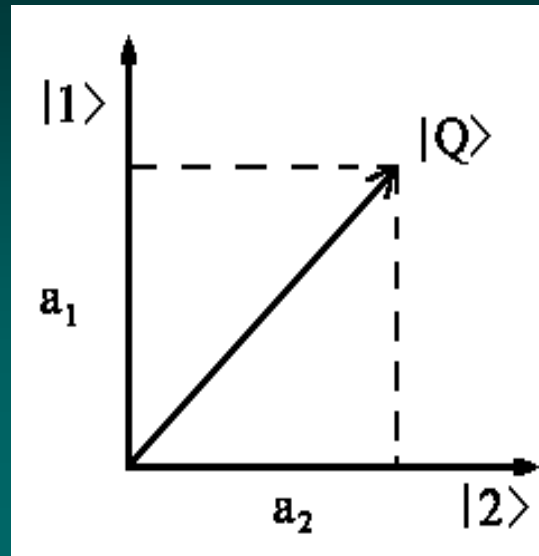
nur i. Spalt offen: $|a_i \langle x|i\rangle|^2$
Teilchen irgendwo zu finden:

$$P_i = \sum_x |a_i|^2 |\langle x|i\rangle|^2 = |a_i|^2$$

$$|\langle x|i\rangle|^2 = \langle x|i\rangle \cdot \langle x|i\rangle = \langle i|x\rangle \langle x|i\rangle$$

$$\sum_x \langle i|x\rangle \langle x|i\rangle = 1$$

da $\sum_x |x\rangle \langle x| = 1 \Rightarrow \langle i|i\rangle = 1$



$$\psi(x) = a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + \dots$$

nur i. Spalt offen: $|a_i \phi_i(x)|^2$
Teilchen irgendwo zu finden:

$$P_i = \int_{-\infty}^{\infty} |a_i|^2 |\phi_i(x)|^2 dx = |a_i|^2$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_i(x)|^2 dx = 1$$

$$P_i = |a_i|^2$$

$$\langle i|i\rangle = 1$$

normiert

$$P_i = |a_i|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_i(x)|^2 dx = 1$$

$$\sum_i P_i = 1$$

$$\sum_i |a_i|^2 = 1$$

Eigenschaften der Vektoren bzw. Amplituden

Doppelspalt-Experiment, ohne zu beobachten durch welchen Spalt das Teilchen geht:

$$p(x) = |\langle x|Q\rangle|^2$$

$$\langle x|Q\rangle = a_1\langle x|1\rangle + a_2\langle x|2\rangle$$

$$p(x) = |a_1|^2|\langle x|1\rangle|^2 + |a_2|^2|\langle x|2\rangle|^2 + a_1^*a_2\langle 1|x\rangle\langle x|2\rangle + a_1a_2^*\langle 2|x\rangle\langle x|1\rangle$$

$$p(x) = |\psi(x)|^2$$

$$\psi(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x)$$

$$p(x) = |a_1|^2|\phi_1|^2 + |a_2|^2|\phi_2|^2 + a_1^*a_2\phi_1^*\phi_2 + a_1a_2^*\phi_1\phi_2^*$$

Gesamtwahrscheinlichkeit das Teilchen irgendwo zu finden ist 1

$$P = \sum_x p(x) = 1$$

$$= |a_1|^2 + |a_2|^2 + a_1^*a_2\langle 1|2\rangle + a_1a_2^*\langle 2|1\rangle$$

$$\Rightarrow \langle 1|2\rangle = 0$$

$$\langle i|k\rangle = 0 \quad (i \neq k)$$

$$P = \int |\psi(x)|^2 dx = 1$$

$$= |a_1|^2 + |a_2|^2 + a_1^*a_2 \int \phi_1^* \phi_2 dx + a_1a_2^* \int \phi_1 \phi_2^* dx$$

$$\int \phi_1 \phi_2^* dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(x)^* \phi_k(x) dx = 0 \quad (i \neq k)$$

orthogonal

orthonormal

Orthonormale Zustände

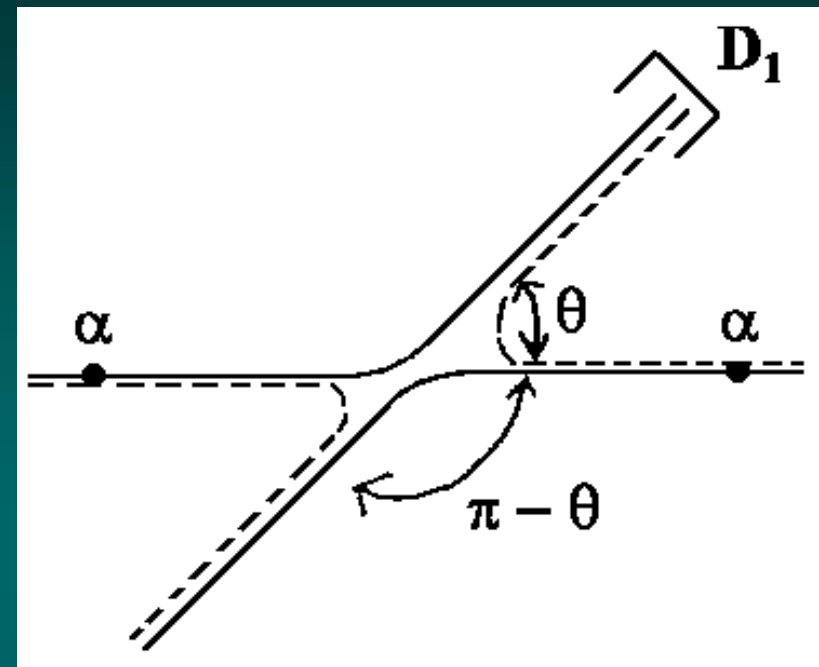
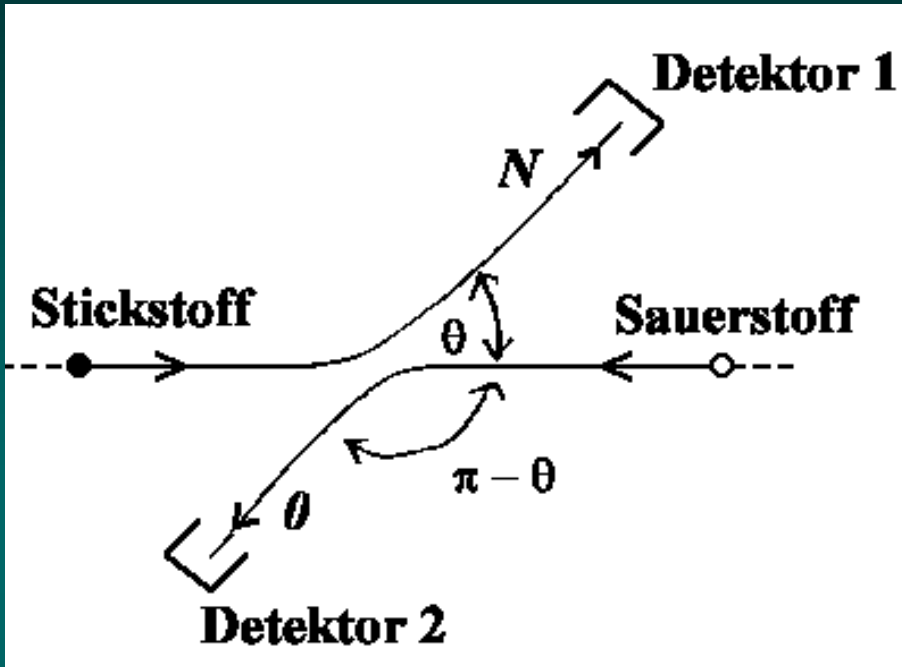
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_i^* \phi_k dx = \delta_{i,k}$$
$$\langle i|k\rangle = \delta_{i,k}$$

$$\delta_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases}$$

Beispiel für orthonormale Funktionen:

$\varphi_1(x) = (1/2)^{1/2}$, $\varphi_2(x) = (3/2)^{1/2} x$ und $\varphi_3(x) = (5/8)^{1/2} (3x^2-1)$
sind im Intervall $[-1,+1]$ orthonormal.

Unterscheidbare und identische Teilchen



Die Wahrscheinlichkeit $P(\theta)$ ein Teilchen unter dem Winkel θ zu finden, hängt davon ab, ob $f(\theta)$ die Amplitude der Streuung für

unterscheidbare:

$$P_u(\theta) = |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2$$

nicht unterscheidbare Teilchen ist:

$$P_i(\theta) = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2$$

Für den Streuwinkel $\theta = \pi/2$

$$P_u(\theta = \pi/2) = 2 |f(\theta = \pi/2)|^2$$

$$P_i(\theta = \pi/2) = 4 |f(\theta = \pi/2)|^2$$

Streuung von *identischen* Elektronen

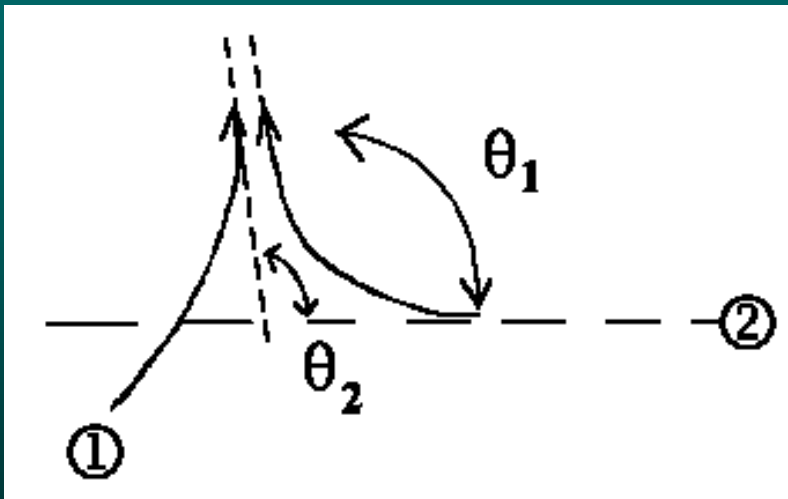
Für die Streuung von *identischen* Elektronen findet man:

$$P_i(\text{Elektronen}) = |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2$$

$$\text{für } \theta = \pi/2: \quad P_i(\pi/2) = 0$$

Boseteilchen (Spin ganzzahlig): $f(\theta) + f(\pi - \theta)$ [α -Teilchen, Photonen]

Fermiteilchen (Spin halbzahlig): $f(\theta) - f(\pi - \theta)$ [Elektronen, Myonen]



$$P_i = |f(\theta_1) - f(\theta_2)|^2$$

Falls sich die beiden Teilchen auf gleichen Bahnen bewegen sollen, ist $\theta_1 = \theta_2$ und daher $P_i = 0$!!!!

D.h. zwei Elektronen mit *gleichem* Spin können sich niemals am gleichen Ort befinden. Dies ist das berühmte ***Pauli'sche Ausschließungsprinzip***

Wolfgang Ernst Pauli

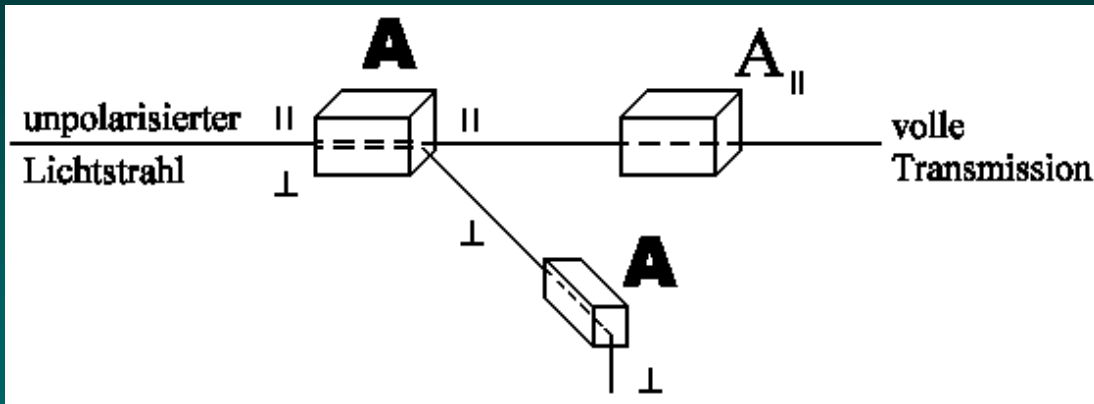


Nobelpreis 1945



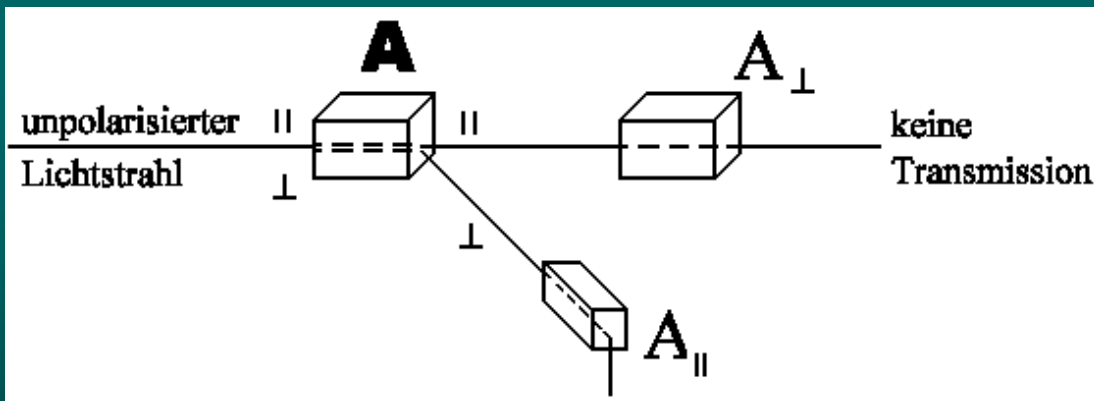
* 25. April 1900 in Wien
+ 15. Dez. 1958 in Zürich

Messungen in der Quantenmechanik



$$|Q\rangle = a_{||}|A_{||}\rangle + a_{\perp}|A_{\perp}\rangle$$

$|a_{\perp}|^2$ ist Wahrscheinlichkeit
 \perp Polarisation zu finden
 $|a_{||}|^2$ ist Wahrscheinlichkeit
 $||$ Polarisation zu finden

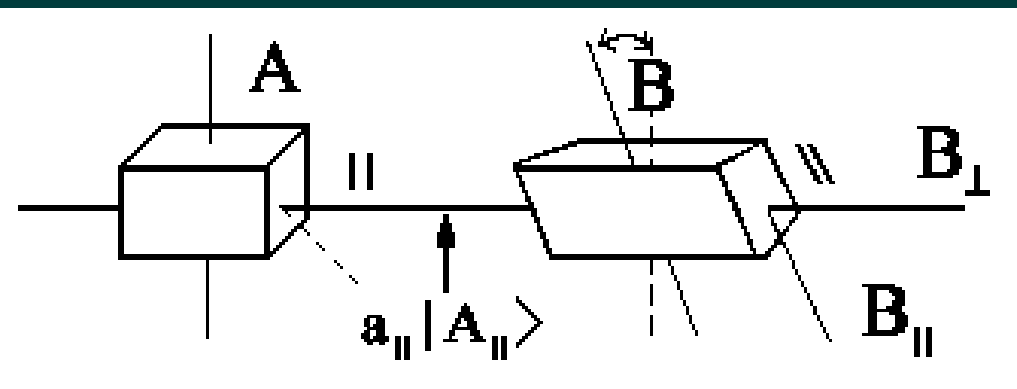


Messung $||$: $|\langle A_{||}|Q\rangle|^2 = |a_{||}|^2$
 Messung \perp : $|\langle A_{\perp}|Q\rangle|^2 = |a_{\perp}|^2$

$$\langle Q|Q\rangle = |a_{||}|^2 + |a_{\perp}|^2 = 1$$

Nach der Messung ist das System
 im Zustand $a_{||}|A_{||}\rangle$ für $||$ Messung, bzw.
 im Zustand $a_{\perp}|A_{\perp}\rangle$ für \perp Messung

Messungen in der Quantenmechanik



$$|q\rangle = b_{||}|B_{||}\rangle + b_{\perp}|B_{\perp}\rangle$$

"Ausgangspunkt" $|Q_{\text{neu}}\rangle$ für den $||$ -Kanal ist

$$a_{||}|A_{||}\rangle = b_{||}|B_{||}\rangle + b_{\perp}|B_{\perp}\rangle = |q\rangle$$

Eine Messung von $B_{||}$ ergibt daher:

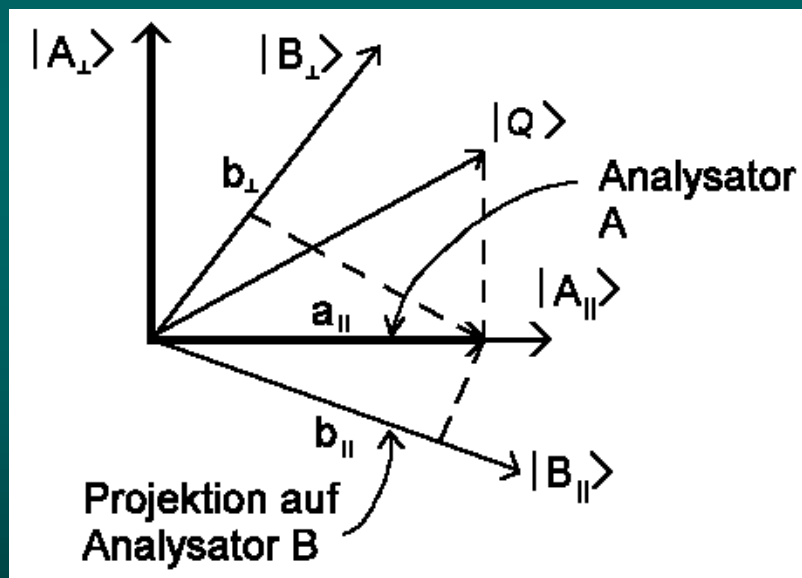
$$\langle B_{||} | Q_{\text{neu}} \rangle = a_{||} \langle B_{||} | A_{||} \rangle = b_{||} \langle B_{||} | B_{||} \rangle + b_{\perp} \langle B_{||} | B_{\perp} \rangle$$

Daraus folgt ($\langle B_{||} | B_{||} \rangle = 1$ und $\langle B_{||} | B_{\perp} \rangle = 0$):

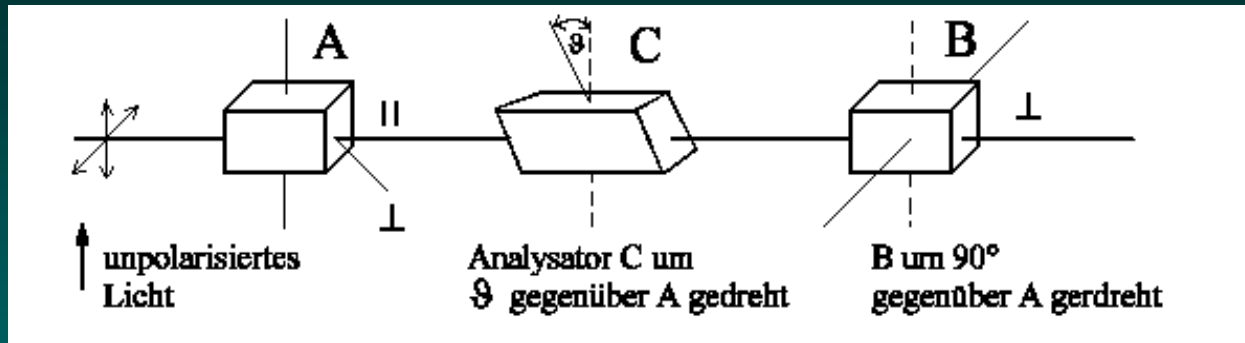
$$b_{||} = a_{||} \langle B_{||} | A_{||} \rangle \quad \text{und} \quad b_{\perp} = a_{||} \langle B_{\perp} | A_{||} \rangle$$

$$P_{||} = |b_{||}|^2 = |a_{||}|^2 |\langle B_{||} | A_{||} \rangle|^2$$

$$P_{\perp} = |b_{\perp}|^2 = |a_{||}|^2 |\langle B_{\perp} | A_{||} \rangle|^2$$



Messungen in der Quantenmechanik

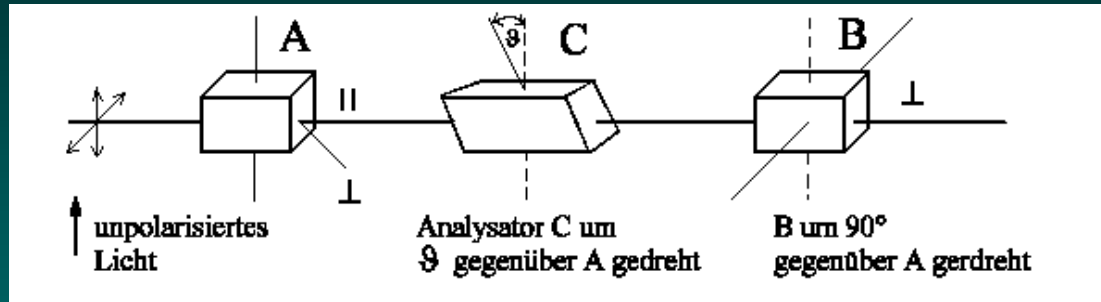


In dieser Anordnung kommt Licht aus B_{\perp} . Entfernen wir C, dann kommt **kein** Licht aus B_{\perp} ! Durch den Analysator C werden die Teilchen (Photonen) im Zustand $c_{\parallel}\phi_{\parallel} + c_{\perp}\phi_{\perp}$ präpariert, wobei c_{\parallel} bzw. c_{\perp} die relativen Anteile der Wahrscheinlichkeitsamplitude (in Abhängigkeit von Drehwinkel ϑ) angeben. Dies ist der Ausgangszustand für alle weiteren Messungen und es gibt daher auch eine Komponente bzgl. B_{\perp} . Ohne den Analysator C ist aber die Komponente bzgl. B_{\perp} Null, da eine senkrechte Anordnung zwischen A und B gewählt wurde.

Durch die Messung wird das System von den möglichen Zuständen (\parallel und \perp) in einem **einzigem** Zustand bzgl. des Messapparates (**entweder** \parallel **oder** \perp) präpariert. Dieser Zustand ist immer bezüglich des Polarisators definiert, mit dem die Messung durchgeführt wird. Dies ist nun der *Ausgangspunkt* für weitere Experimente. D.h. für eine Messung der Polarisation mit einem verdrehten Polarisator C messen wir nun c_{\parallel} bzw. c_{\perp} relativ zu diesem neuen Polarisator C. Natürlich können wir andere Größen, wie z.B. die Wellenlänge des Lichts unbeeinflusst von der Messung der Polarisation durchführen.

Folgerung: Bei einer Ortsmessung, projizieren wir ψ auf die "Ortszustände" x und von nun an ist ψ bzgl. x festgelegt. Eine anschließende Messung des Impulses wird nun ein anderes Ergebnis liefern, als eine Messung bei der der Impuls ohne vorherige Ortsmessung bestimmt wurde.

Messungen in der Quantenmechanik



C soll nun nicht mehr ein Analysator sein, sondern es ist ein neuartiges Instrument oder eine Maschine M , die in *irgendeiner* Weise die Polarisation verdreht.

Wir schreiben hierfür in bekannter Weise von rechts nach links:

< nach | durch | von >

Wir haben insgesamt also vier Möglichkeiten:

von

|| ⊥

nach || $\langle B_{||} | M | A_{||} \rangle$ $\langle B_{||} | M | A_{\perp} \rangle$

⊥ $\langle B_{\perp} | M | A_{||} \rangle$ $\langle B_{\perp} | M | A_{\perp} \rangle$

$$\psi = M \phi$$

M ist weder eine Wahrscheinlichkeitsamplitude noch ein Zustand (oder ein Vektor). Es ist etwas Neues, das **Operator** genannt wird.

M operiert am ursprünglichen Zustand ϕ und erzeugt dadurch einen neuen Zustand ψ

Berechnung der Amplituden bzw. Wellenfunktionen

1) Matrizenalgebra

Werner Heisenberg
Nobelpreis 1932

* 5. Dez. 1901
+ 1. Feb. 1976



Mathematisch

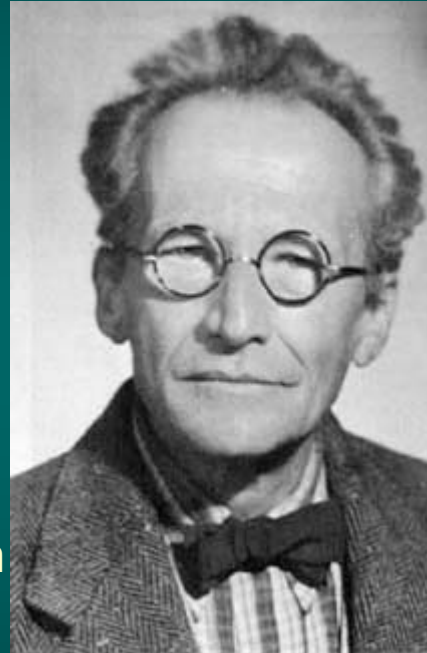
sind alle drei Wege

äquivalent.

2) Operatoren, DGL

Erwin Schrödinger
Nobelpreis 1933

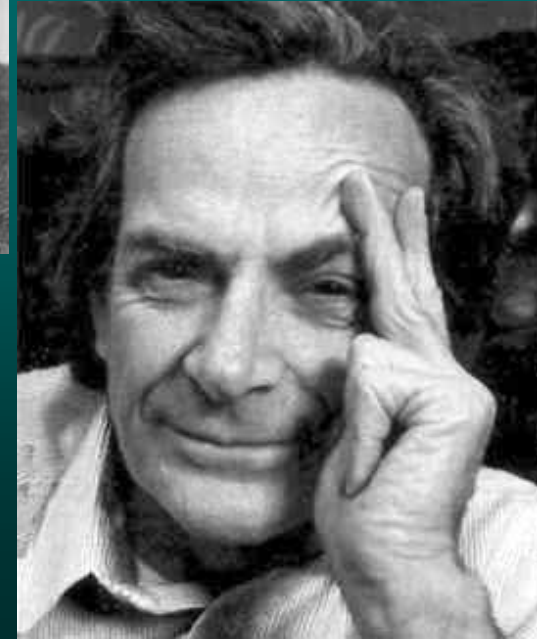
* 12. Aug. 1887 in Erdberg, Wien
+ 4. Jan. 1961 in Wien



3) Pfadintegrale

Richard Feynman; Nobelpreis 1965

* 11. Mai 1918 in Far Rockaway, New York
+ 15. Feb. 1988 in Los Angeles



Die Schrödinger-Gleichung

zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right] \psi = E \psi \quad (1 \text{ dim.})$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x,y,z)\right] \psi = E \psi \quad (3 \text{ dim.})$$

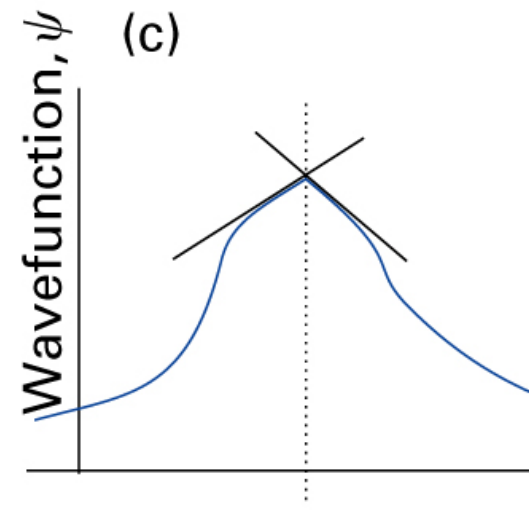
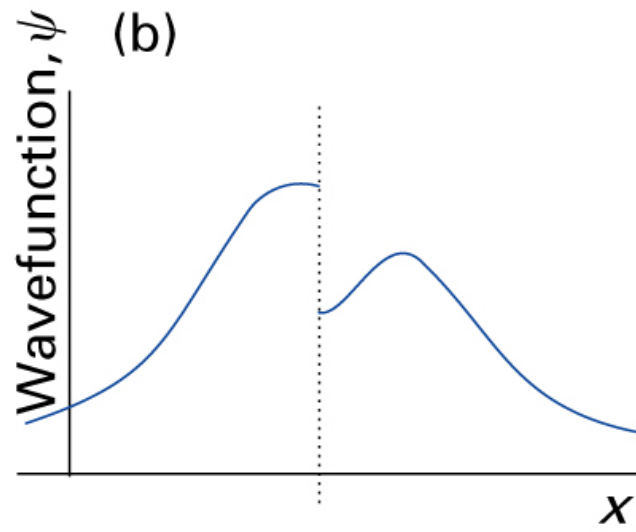
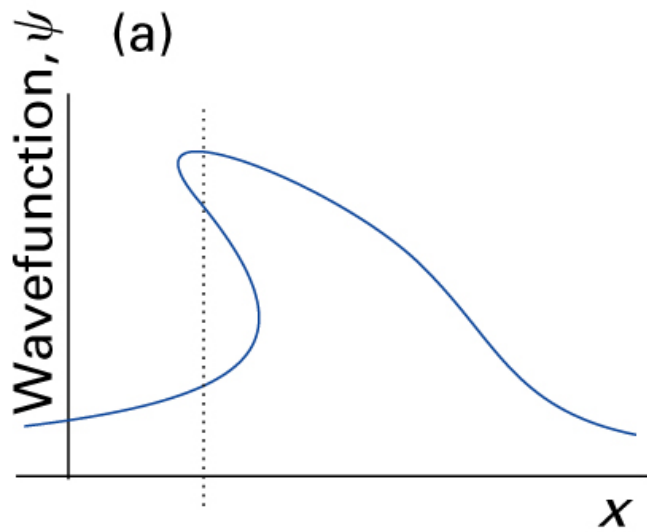
Δ ist der Laplaceoperator: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

zeitabhängige Schrödinger-Gleichung:

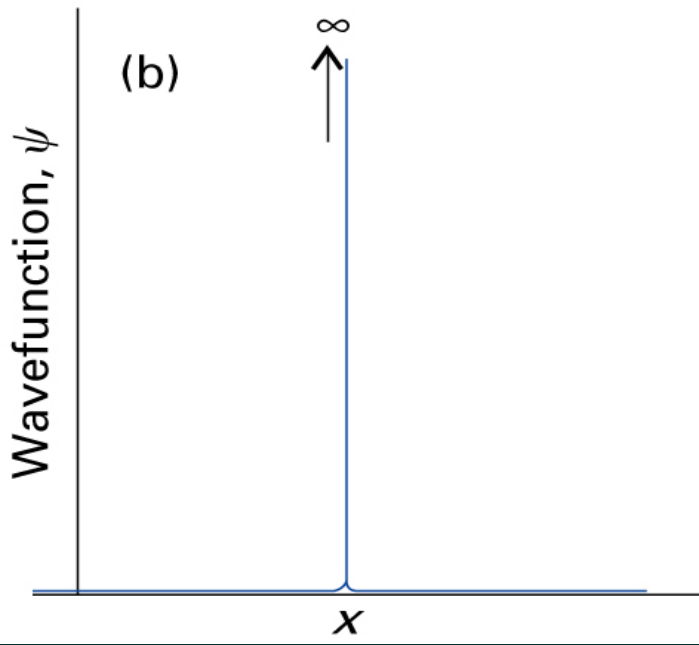
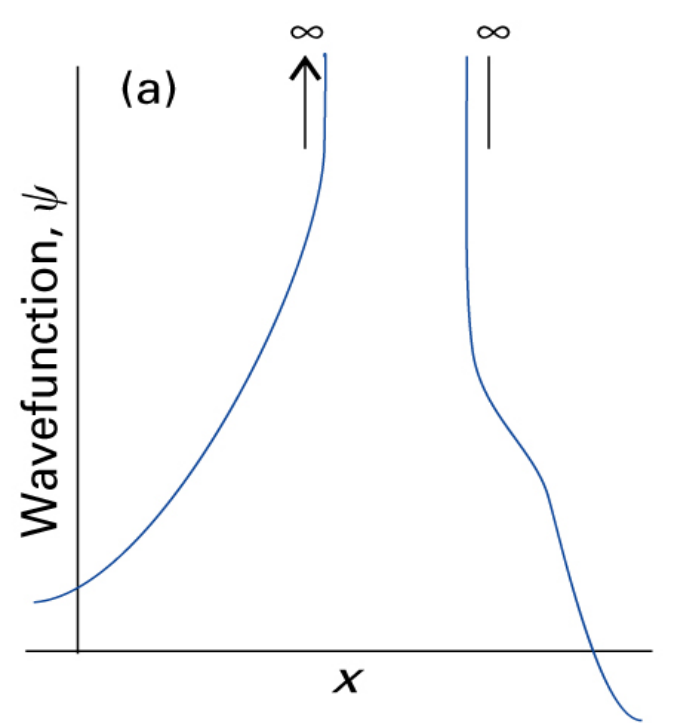
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V\right] \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,y,z)|^2 dx dy dz = 1$$

Eigenschaften der Wellenfunktion



Eigenschaften der Wellenfunktion



Das Grundpostulat der Quantenmechanik

Eigenwertgleichung

Operator · Eigenfunktion = **Eigenwert** · Eigenfunktion

$$A \cdot \Psi_n = A_n \cdot \Psi_n$$

Die Funktionen Ψ_n werden als **Eigenfunktionen** und die Zahlen A_n als **Eigenwerte** des Operators A bezeichnet.

Das Grundpostulat der Quantenmechanik besagt:

Die Eigenwerte A_n sind identisch mit den Messwerten

Operatoren in der Quantenmechanik

Energie	E	→	$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$	Energieoperator $\equiv \mathbf{H}$
Impuls	p	→	$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$	Impulsoperator $\equiv \mathbf{p}$
Ort	x	→	\mathbf{x}	

Drehimpulsoperator L über die klassische Beziehung $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

klassisch	Operator
$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$	$\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$
$E = p^2/2m + V$	$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V$
$L_x = yp_z - zp_y$	$\mathbf{L}_x = \frac{\hbar}{i} (y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y})$
$L_y = zp_x - xp_z$	$\mathbf{L}_y = \frac{\hbar}{i} (z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z})$
$L_z = xp_y - yp_x$	$\mathbf{L}_z = \frac{\hbar}{i} (x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$

Δ ist der Laplaceoperator: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Ende Kapitel 2